



David José dos Santos Henriques

Licenciado em Ciências da Engenharia Civil

Um elemento finito fisicamente não-linear para vigas mistas aço-betão

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil

Orientador: Rodrigo de Moura Gonçalves, Professor Auxiliar,
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente:	Prof. Doutor Carlos Manuel Chastre Rodrigues
Arguente:	Prof. Doutor João Gomes Rocha de Almeida
Vogal:	Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março, 2014



Um elemento finito fisicamente não-linear para vigas mistas aço-betão
David Henriques

“Copyright” David José dos Santos Henriques, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer profundamente ao meu orientador, Professor Rodrigo de Moura Gonçalves, por todo o apoio, conhecimento transmitido e enorme paciência demonstrada ao longo da realização desta Dissertação. Gostava de agradecer aos meus queridos pais e ao meu mano por todas as palavras de incentivo e por todos os conselhos. À minha namorada Vanessa obrigado por estares sempre aqui ao meu lado, por todos os bons momentos que vivi e que hei-de viver ao teu lado. À Professora Ildi Cismaşiu os meus agradecimentos pelo fornecimento da chave do programa *ATENA* sem a qual grande parte deste trabalho não seria possível realizar. Por toda a ajuda e disponibilidade, obrigado ao Professor Hugo Biscaia, ao Hugo Fernandes e ao Herlander Fernandes. Quero agradecer ao Professor João Leal e ao Professor Mário Franca pelos conselhos dados na minha primeira defesa nota, conselhos esses que tanto me incentivaram no meu percurso académico. Quero ainda agradecer ao Professor Nuno Guerra, ao Professor António Batista, ao Professor João Rocha de Almeida e ao Professor José Delgado, tanto pelas grandes oportunidades como pelos bons conselhos. Obrigados aos meus grandes amigos David Costa, Dione Guimarães, Diogo Pinto, Diogo Oliveira, Francisco Franco, Frederico Oliveira, Joana Chaves, Luís Viotty, Rita Vieira e Tomás Rantanen por todos os bons momentos. Quero também agradecer a todos os amigos que fiz na faculdade, Gonçalo Antunes, Licínio Cruz, Miguel Bairrão, Miguel Saraiva, Miguel Serra e Miguel Teixeira. Em último lugar obrigado aos meus queridos amigos dos Maristas, apesar do pouco tempo que consegui passar com vocês nestes últimos anos a amizade manteve-se sempre forte!

Resumo

Neste trabalho desenvolve-se, implementa-se e valida-se um elemento finito de barra baseado na Teoria Generalizada de Vigas, capaz de caracterizar eficazmente o comportamento fisicamente não-linear global de vigas mistas aço-betão. O elemento finito considera os seguintes efeitos: (i) *shear lag*, (ii) deformação por esforço transversal da alma do perfil de aço, (iii) fendilhação e comportamento não-linear à compressão do betão e (iv) plastificação do perfil e da armadura. A eficácia computacional do elemento proposto resulta da introdução de hipóteses simplificativas específicas, relativas aos campos de tensão e deformação, as quais permitem reduzir o número de graus de liberdade sem perda de precisão e, simultaneamente, utilizar leis constitutivas simples e de fácil implementação. Os exemplos de aplicação mostram que o elemento proposto conduz a resultados muito semelhantes aos obtidos com modelos de elementos finitos de casca e/ou de volume, muito embora o número de graus de liberdade e o tempo de cálculo sejam significativamente inferiores. Para além disso, mostra-se que a análise das funções de amplitude modais da GBT permite extrair conclusões únicas ao nível do comportamento estrutural das vigas mistas.

Palavras chave:

- Vigas mistas aço-betão.
- Teoria generalizada de vigas.
- Análises fisicamente não-lineares.
- *Shear lag*.
- Fendilhação.

Abstract

A physically non-linear finite element for steel-concrete composite beams

This work concerns the development, implementation and validation of a beam finite element which is based on the Generalized Beam Theory and is capable of characterizing efficiently the physically non-linear global behaviour of steel-concrete composite beams. In particular, the element allows the consideration of the following effects: (i) shear lag, (ii) shear deformation of the steel beam web, (iii) concrete cracking and non-linear behaviour under compression and (iv) plastification of the steel beam and reinforcement. The computational efficiency of the element stems from the introduction of specific assumptions concerning the stress and strain fields, which make it possible to reduce the number of DOFs without loss of accuracy and, simultaneously, to use constitutive laws which are simple and easy to implement. The examples presented in this work show that the proposed element leads to results which are very similar to those obtained with shell/volume finite element models, even though the number of DOFs and the computation times are significantly smaller. In addition, it is shown that the analysis of the GBT mode amplitude functions makes it possible to extract unique conclusions concerning the structural behaviour of composite beams.

Keywords:

- Steel-concrete composite beams.
- Generalized beam theory.
- Physically non-linear analyses.
- Cross-section deformation.
- Shear lag.
- Cracking

Índice de Matérias

Índice de Matérias	ix
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xv
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	1
1.3 Organização da Dissertação	2
1.4 Publicações	2
2 Fundamentos da Teoria Generalizada de Vigas	3
2.1 Introdução	3
2.2 Notação	4
2.3 Equações fundamentais	4
2.4 Formulação de um elemento finito	11
3 Aplicação à análise fisicamente não-linear de vigas mistas	15
3.1 Introdução	15
3.2 Hipóteses simplificativas adicionais e modos de deformação	16
3.3 Modelos Constitutivos	21
3.3.1 Modelo constitutivo para o aço	21
3.3.2 Modelos constitutivos para o betão	22
3.3.2.1 Modelo implementado	22
3.3.2.2 Modelos do <i>ADINA</i> e <i>ATENA</i> utilizados	24
3.4 Implementação em <i>MATLAB</i>	26
3.4.1 Programa de controle	27
3.4.2 Determinação de matrizes/vetores	28

3.4.3	Determinação de tensões em regime fisicamente não-linear	28
3.4.4	Visualizador de resultados	30
3.5	Aplicações	32
3.5.1	Exemplo 1 – <i>shear lag</i> elástico em vigas simplesmente apoiadas	32
3.5.2	Exemplo 2 – fendilhação	36
3.5.3	Exemplo 3 – fendilhação generalizada e comparação com elementos finitos convencionais	39
3.5.4	Exemplo 4 – <i>shear lag</i> com fendilhação numa viga encastrada-apoiada	41
3.5.5	Exemplo 5 – material elastoplástico	44
3.5.5.1	Viga CTB1	47
3.5.5.2	Viga CTB4	47
3.5.6	Exemplo 6 – material elastoplástico incluindo deformação por corte . .	52
3.5.7	Exemplo 7 – material elastoplástico e <i>shear lag</i>	54
4	Conclusões e desenvolvimentos futuros	61
4.1	Conclusões	61
4.2	Desenvolvimentos futuros	62
	Bibliografia	65
A	Rotinas desenvolvidas em <i>MATLAB</i>	67
A.1	Introdução de dados, caso viga CTB1	67
A.2	Cálculos Auxiliares	70
A.3	Matriz de rigidez tangente para a primeira iteração	73
A.4	Matriz de rigidez tangente e vetor das forças internas, betão elástico com fendilhação, aço linear, caso exemplo 4	74
A.5	Matriz de rigidez tangente e vetor das forças internas, betão não linear, aço não linear com comportamento uniaxial, caso viga CTB1	76
A.6	Matriz de rigidez tangente e vetor das forças internas, betão não linear, aço não linear com comportamento multiaxial, exemplo 6	79
A.7	Vetor incremental das forças exteriores	83
A.7.1	Força distribuída	83
A.7.2	Força pontual	84
A.8	Ciclo incremental/iterativo, caso viga CTB1	85
A.9	Visualizador gráfico, caso viga CTB1	86

Índice de Figuras

2.1	Modos de deformação de secções de pontes mistas aço-betão: (a) secção com dois caixões, (b) secção “bi-viga” com simplificação de simetria — apenas metade da secção transversal é representada. Extraído de Gonçalves e Camotim (2010). . .	5
2.2	Configuração deformada de uma barra com secção em “hat” e respetiva decomposição modal (extraído de Gonçalves, 2014)	6
2.3	Secção arbitrária de parede fina com eixos locais de cada parede (adaptado de Gonçalves e Camotim, 2011)	6
2.4	Ilustração da hipótese de Kirchhoff (neste caso $w_{,x} < 0$)	7
2.5	Parcela de membrana u e de flexão $-zw_{,x}$ de U_x (adaptado de Schardt, 1989) . .	8
2.6	Funções de interpolação de Hermite	11
2.7	Funções de interpolação de Lagrange	12
3.1	Secção-tipo de uma viga mista aço-betão (adaptado de Amaral, 2011)	17
3.2	Discretização da secção-tipo (adaptado de Amaral, 2011)	17
3.3	Modo de deformação de extensão axial	18
3.4	Modo de flexão pura	18
3.5	Modos de <i>shear lag</i> linear	19
3.6	Modos de <i>shear lag</i> quadrático	19
3.7	Modos de <i>shear lag</i> para problemas com simetria	20
3.8	Modo de Empenamento de flexão	20
3.9	Lei uniaxial elástica-perfeitamente plástica	22
3.10	(a) Evolução das tensões no betão quando ocorre a sequência de deformação (b) .	23
3.11	Estados de tensão antes e após a formação de uma fenda	25
3.12	Lei constitutiva uniaxial para o betão no programa <i>ADINA</i> , (Bathe 2014).	25
3.13	Lei constitutiva uniaxial para o betão no programa <i>ATENA</i> , (Cervenka, 2013). .	26
3.14	Método de Newton-Raphson para sistemas com um grau de liberdade	27
3.15	Montagem da matriz global \mathbf{K}_t e dos vetores globais $\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \mathbf{g}$	29
3.16	Numeração dos pontos de integração para (i) dois elementos finitos (ii) duas paredes (iii) dois pontos de integração segundo x (iv) três pontos de integração segundo y e (v) dois pontos de integração segundo z	30
3.17	Aplicação correta (à esquerda) e incorreta (à direita) da matriz “Faces”	31

3.18	Exemplo de utilização do comando <i>colorbar</i>	32
3.19	Exemplo 1: (a) geometria da secção transversal, carga e parâmetros materiais, (b) secção discretizada, (c) modos de deformação e (d) modelo de elementos finitos de casca (<i>ADINA</i>).	33
3.20	Exemplo 1: configurações deformadas e distribuição das tensões normais longitudinais na laje de betão.	35
3.21	Exemplo 1: (a) tensões normais longitudinais na laje de betão, a meio-vão, e (b) funções de amplitude modais da GBT para $0 \leq x \leq L/2$	36
3.22	Exemplo 2: (a) geometria da secção transversal, carga aplicada e propriedades dos materiais, (b) modos de deformação utilizados e (c) condições de apoio, notação, vão, carga aplicada e diagrama de momento fletor.	37
3.23	Exemplo 2: sistema Base com as forças exteriores e respetivo diagrama de momento fletor.	38
3.24	Exemplo 2: sistema Base com carga unitária e respetivo diagrama de momento fletor.	38
3.25	Exemplo 2: comprimento da zona não fendilhada em função do número de elementos finitos.	39
3.26	Exemplo 3: (a) geometria da secção transversal, carga, propriedades do material e secção reduzida à linha média, (b) modos de deformação e (c) modelo de elementos finitos casca/ <i>solid</i> / <i>truss</i>	40
3.27	Exemplo 3: modos sinusoidais com (a) uma semi-onda (b) duas semi-ondas e (c) três semi-ondas em cada banzo.	41
3.28	Exemplo 3: (a) distribuição de tensões normais longitudinais na armadura, na secção de meio-vão (sem simplificações de simetria), e (b) gráfico carga-deslocamento	42
3.29	Exemplo 4: (a) geometria da secção transversal, carga, propriedades do material e secção reduzida à linha média, (b) modos de deformação e (c) modelo de elementos finitos casca/ <i>solid</i> / <i>truss</i>	43
3.30	Exemplo 4: (a–b) configuração deformada e distribuição das tensões normais longitudinais na laje de betão, na superfície média.	45
3.31	Exemplo 4: (a) distribuição de tensões na laje, na secção de meio-vão e (b–e) funções de amplitude modais ao longo do comprimento da viga, para discretizações com 8/64 elementos finitos.	46
3.32	Viga CTB1: (a) carregamento, geometria e propriedades dos materiais; (b) modelo de elementos finitos convencionais (<i>ADINA</i>) e (c) modos de deformação da GBT utilizados na análise.	48
3.33	Viga CTB1: (a) configuração deformada da viga em perspetiva (esquerda) e em alçado (direita) para a carga última; (b) gráfico das funções de amplitude dos modos e (c) gráfico carga-deslocamento.	49
3.34	Viga CTB4: (a) carregamento, geometria e propriedades dos materiais; (b) modelo de elementos finitos convencionais <i>ADINA</i> e (c) modos de deformação da GBT utilizados na análise.	50
3.35	Viga CTB4: (a) configuração deformada da viga em perspetiva (esquerda) e em alçado (direita) para a carga última; (b) gráfico das funções de amplitude dos modos e (c) gráfico carga-deslocamento.	51
3.36	Exemplo 6: (a) carregamento, geometria e propriedades dos materiais; (b) modelo de elementos finitos convencionais (<i>ATENA</i>) e (c) modos de deformação da GBT utilizados na análise.	53

3.37	Exemplo 6: (a) configuração deformada no colapso e carga aplicada, (b) gráfico carga-deslocamento, (c) configurações deformadas no colapso obtidas com os modelos de elementos da GBT (à esquerda) e convencionais (<i>ATENA</i> , à direita) e (d) funções de amplitude modais da GBT.	54
3.38	Exemplo 7: (a) carregamento, geometria e propriedades dos materiais; (b) modelo de elementos finitos convencionais (<i>ATENA</i>).	55
3.39	Exemplo 7: (a) gráfico carga-deslocamento, (b) deformação longitudinal da laje de betão no plano médio, para uma carga de 100 kN/m , sem modos de <i>shear lag</i> (à esquerda) e com modos de <i>shear lag</i> (à direita).	56
3.40	Exemplo 7: deformação longitudinal da laje de betão no plano médio, para 100 kN/m e 300 kN/m , com escala de cores constante.	57
3.41	Exemplo 7: deformação longitudinal da laje de betão no plano médio, para 400 kN/m , 410 kN/m e 420 kN/m , com escala de cores constante.	58
3.42	Exemplo 7: distribuições de ε_{xx} na face superior da laje e configurações deformadas fornecidas pelo modelo de elementos finitos convencionais e o modelo de elementos finitos da GBT, para um deslocamento de $0,0087 \text{ m}$ e um deslocamento de $0,0139 \text{ m}$	59
3.43	Exemplo 7: distribuições de ε_{xx} na face superior da laje e configurações deformadas fornecidas pelo modelo de elementos finitos convencionais e o modelo de elementos finitos da GBT, para um deslocamento de $0,0171 \text{ m}$ e um deslocamento de $0,0274 \text{ m}$	60

Índice de Tabelas

3.1	Deslocamento vertical para o vão de 6 metros	34
3.2	Deslocamento vertical para o vão de 8 metros	34
3.3	Rigidez de flexão da secção fendilhada e não-fendilhada	37
3.4	Exemplo 4: deslocamento vertical do meio-vão	43

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Abreviaturas

EC4 Eurocódigo 4

GBT *Generalised Beam Theory* (Teoria Generalizada de Vigas)

Índices e Operadores Especiais

$()^M$ parcela de membrana

$()^B$ parcela de flexão

$()_{,i}$ derivada parcial em ordem a i

$d()$ variação

$\delta()$ variação virtual

$\Delta()$ variação incremental-iterativa

$P()$ primitiva

$()^t$ matriz (vetor) transposta (transposto)

Letras Latinas Maiúsculas

A área da secção transversal

A_k área da secção transversal do material k

\mathbf{C} operador constitutivo para o caso elástico

\mathbf{C}_t operador constitutivo tangente

E módulo de elasticidade

E_c módulo de elasticidade do betão

E_t módulo tangente

E_i módulo de elasticidade do material i

F_j função de interpolação de Lagrange j

\mathbf{F} vetor das forças externas

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

G	módulo de distorção
G_c	módulo de distorção do betão
H_k	função de interpolação de Hermite k
I	momento de inércia
\mathbf{K}_t	matriz de rigidez tangente
L	comprimento
M	momento fletor
N	número de modos de deformação
N_w	número de modos de empenamento
\mathbf{Q}	vetor das forças internas
\mathbf{U}	campo de deslocamentos da parede
V	volume
W_{ext}	trabalho das forças exteriores
W_{int}	trabalho das forças interiores
Y_{LN}	Posição da linha neutra elástica

Letras Latinas Minúsculas

b_f	largura do banzo do perfil de aço
b_i	largura da parede i da secção
f_y	tensão de cedência do aço
\mathbf{g}	vetor das forças desequilibradas
h_c	altura da laje de betão
h_w	altura da alma do perfil
l	comprimento do elemento finito
n_e	número de elementos finitos
t_f	espessura do banzo do perfil de aço
t_w	espessura da alma do perfil de aço
u	componente do deslocamento do plano médio da parede segundo x
\bar{u}_k	deslocamento u relativo ao modo de deformação k
v	componente do deslocamento do plano médio da parede segundo y

\bar{v}_k deslocamento v relativo ao modo de deformação k

w componente do deslocamento do plano médio da parede segundo z

\bar{w}_k deslocamento w relativo ao modo de deformação k

x eixo paralelo ao eixo da viga

y eixo contido na secção transversal e coincidente com a linha média da parede

z eixo contido na secção transversal e perpendicular à linha média da parede

Letras Gregas

β fator de redução da rigidez de corte

$\boldsymbol{\varepsilon}$ tensor das deformações infinitesimais

ε extensão linear

ε_c extensão associada a σ_c

γ distorção

ϕ_k função de amplitude do modo de deformação k

Ξ_U matriz auxiliar para definição de \boldsymbol{U}

Ξ_ε matriz auxiliar para definição de $\boldsymbol{\varepsilon}$

$\boldsymbol{\sigma}$ tensor das tensões

σ_c tensão de compressão máxima do betão em provetes cilíndricos

σ_t tensão de tração máxima do betão

Ω superfície

Ψ matriz que contém as funções de interpolação

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A solução mais correntemente adotada para vigas mistas aço-betão consiste numa laje de betão armado ligada a uma série de vigas de aço em I, dispostas paralelamente (Calado e Santos, 2010). Na análise e dimensionamento deste tipo de solução, é fundamental ter em conta alguns efeitos particulares, nomeadamente os efeitos de *shear lag* (distribuição não-uniforme de tensões em banzos largos por efeito da deformação por corte — ver, por exemplo, Reissner, 1946) e da fendilhação do betão.

Para ter em conta estes efeitos, o Eurocódigo 4 (CEN, 2004) prescreve a utilização de modelos de análise global em que a rigidez de flexão das barras é calculada tendo em conta larguras efetivas para o banzo de betão e o estado fendilhado/não-fendilhado. Estes modelos são algo complexos, dado que envolvem barras com rigidez variável e requerem a determinação (exata ou aproximada) das zonas fendilhadas. Em alternativa, poder-se-ia recorrer a elementos finitos que permitissem considerar os efeitos supracitados de forma automática mas, conforme se verá, isso requer a utilização de elementos de casca e/ou de volume só ao alcance de programas muito especializados e sofisticados. Para além disso, os modelos resultantes são necessariamente muito exigentes em termos do esforço computacional e, portanto, são em geral inviáveis para utilização corrente em gabinetes de Projeto.

A Teoria Generalizada de Vigas (doravante designada por GBT, da designação em língua inglesa, *Generalised Beam Theory*), é uma teoria de barras prismáticas de parede fina que permite considerar a deformação arbitrária da secção através do recurso aos chamados “modos de deformação”. Embora esta teoria seja apresentada no Capítulo 2, é de referir que, em virtude da sua natureza “modal”, tem vindo a afirmar-se como uma alternativa extremamente vantajosa face aos métodos tradicionais de análise de barras de parede fina (faixas finitas e elementos finitos de casca). Infelizmente, a aplicação da GBT à análise de estruturas mistas aço-betão é bastante recente (Gonçalves e Camotim, 2010; Amaral, 2011) e está por enquanto restrita ao caso elástico linear. No entanto, é de referir que nestes trabalhos foram obtidos resultados extremamente promissores, revelando que a GBT tem um grande potencial de aplicação nesta área.

1.2 Objetivos

O primeiro e principal objetivo deste trabalho consiste em desenvolver, implementar e validar um elemento finito baseado na GBT, capaz de caracterizar eficazmente o comportamento

fisicamente não-linear global de vigas mistas aço-betão. Em particular, pretende-se que o elemento finito seja capaz de contabilizar os seguintes efeitos: (1) *shear lag*, (2) deformação por esforço transversal da alma do perfil de aço, (3) fendilhação e comportamento não-linear à compressão do betão e (4) plastificação do perfil e da armadura. É de notar que não existe atualmente nenhum elemento finito de barra com estas características.

O segundo objetivo consiste em desenvolver, de raiz, um programa em *MATLAB* (*The MathWorks*, 2010) que permita efetuar análises não-lineares com o elemento finito proposto e mostrar visualmente os resultados obtidos. Este programa deverá ser adaptável para futura incorporação de novas funcionalidades, tais como a contabilização da distorção da secção e da flexibilidade da conexão de corte, entre outras.

Finalmente, pretende-se contribuir para divulgar a GBT e demonstrar que os elementos finitos baseados nesta teoria oferecem várias vantagens relativamente aos elementos finitos “convencionais” utilizados para analisar estruturas de parede fina (elementos de casca e de volume).

1.3 Organização da Dissertação

A Dissertação desenvolve-se ao longo de quatro Capítulos, o primeiro dos quais é a presente introdução.

No segundo Capítulo apresentam-se os fundamentos da GBT. São apresentadas e descritas as hipóteses simplificativas e as equações fundamentais. Para além disso, apresenta-se o elemento finito que serviu de base ao elemento formulado na presente Dissertação.

O terceiro capítulo corresponde a desenvolvimentos originais. Começa-se por particularizar e especializar o elemento finito do capítulo anterior para vigas mistas aço-betão com comportamento fisicamente não-linear. São descritos os modelos constitutivos a utilizar, nomeadamente os modelos para o aço e o betão. De seguida, são discutidas algumas particularidades da implementação numérica em *MATLAB*. Neste Capítulo são ainda apresentados seis exemplos de validação. O primeiro exemplo foca o efeito de *shear lag* em vigas simplesmente apoiadas com material elástico. No segundo exemplo estuda-se a precisão do elemento finito proposto na determinação do comprimento da zona fendilhada de uma viga encastrada-apoiada. O terceiro exemplo pretende mostrar que o elemento permite obter bons resultados quando ocorre fendilhação generalizada. O quarto exemplo diz respeito ao efeito de *shear lag* em vigas contínuas, tendo em conta a fendilhação do betão. O quinto exemplo ilustra a precisão do elemento quando se considera o comportamento não-linear do aço e betão, sem efeito de *shear lag*. O sexto e sétimo exemplos consideram todos os efeitos em simultâneo (não-linearidade física e *shear lag*).

Finalmente, o quarto e último capítulo apresenta as principais conclusões do trabalho e os desenvolvimentos futuros.

1.4 Publicações

O trabalho realizado deu origem ao artigo intitulado “Non-linear analysis of steel-concrete composite beams”, que será apresentado e publicado nas Atas da “11th. World Congress on Computational Mechanics”, a ter lugar em Barcelona, de 20 a 25 de Julho de 2014.

Capítulo 2

Fundamentos da Teoria Generalizada de Vigas

2.1 Introdução

Tal como foi referido no Capítulo anterior, neste trabalho propõe-se um elemento finito para vigas mistas aço-betão baseado na GBT. Assim, apresenta-se neste Capítulo uma breve revisão dos aspetos fundamentais desta teoria e do elemento finito proposto por Gonçalves e Camotim (2011, 2012), o qual constitui a base do elemento desenvolvido no presente trabalho.

A GBT é uma teoria para barras prismáticas com secção de parede fina que permite considerar a deformação da secção. Foi inicialmente proposta e desenvolvida por R. Schardt e colaboradores, durante a segunda metade do século XX — uma lista das publicações deste grupo de investigação está disponível em <http://vtb.info/>, sendo de referir que o livro de Schardt (1989) constitui a principal referência bibliográfica na área. Mais recentemente, a GBT tem vindo a ser desenvolvida por outros autores, nomeadamente pelo grupo de investigação liderado por D. Camotim (ver, por exemplo, Camotim et al., 2004, 2006, 2010).

Na GBT, o campo de deslocamentos de uma barra é definido através de uma combinação linear de “modos de deformação” da secção transversal, os quais correspondem aos modos clássicos da teoria das peças lineares (extensão axial, duas flexões em torno dos eixos principais de flexão e torção em torno do centro de corte) e ainda a modos que contabilizam a deformação no plano da secção e/ou o seu empenamento. A título de exemplo, apresentam-se na figura 2.1 os modos de deformação de duas pontes mistas aço-betão. No primeiro caso (a), os primeiros quatro modos correspondem aos modos clássicos da teoria das peças lineares e os restantes envolvem empenamento, flexão transversal e deformação por corte das várias paredes. O segundo caso (b) corresponde à simplificação de simetria de uma secção do tipo “bi-viga”, pelo que apenas os dois primeiros modos coincidem com os modos clássicos (extensão e flexão segundo o eixo horizontal), o modo 3 é distorcional e o modo 4 reflete a deformação da alma do perfil por esforço transversal (tal como o modo 8 da secção com dois caixões).

A natureza modal da GBT oferece algumas vantagens significativas face aos métodos mais tradicionais de análise de barras de parede fina (o método das faixas finitas e o método dos elementos finitos de casca), nomeadamente: (i) a análise da participação modal na solução do problema em causa permite aferir a importância relativa dos vários modos e, consequentemente, extrair com grande facilidade conclusões relativas ao comportamento estrutural e (ii) em muitos casos é possível efetuar análises com um número extremamente reduzido de graus de liberdade (modos de deformação) sem que isso afete a precisão da solução, o que é

conseguido através da introdução de hipóteses simplificativas relativas aos campos de tensões e/ou deformações (tal como será visto no Capítulo 3).

A título de exemplo, a figura 2.2 mostra a configuração deformada de uma barra com secção em “hat”, simplesmente apoiada de vão L , e a respetiva decomposição modal da GBT. No gráfico na parte inferior da figura representam-se os valores das “funções de amplitude”, ϕ , de cada modo ao longo do eixo da barra: a letra F está associada ao modo de flexão, a letra D ao modo de distorção, a letra T ao modo de torção e as letras LP ao modo local de placa. Conforme se pode observar, a solução fornecida pela GBT permite facilmente identificar a importância relativa dos vários modos de deformação.

2.2 Notação

Para permitir uma melhor leitura do texto que se segue, estabelece-se desde já a notação utilizada para representar as diversas grandezas e as operações entre elas. Esta notação segue a utilizada noutros trabalhos (Gonçalves et al., 2010; Gonçalves e Camotim 2011, 2012).

Vetores e matrizes são representados por letras em ***negrito itálico***. Tal representação engloba grandezas tensoriais (de 1ª e 2ª ordem), cujas componentes são agrupadas sob a forma de vetores ou matrizes, para permitir uma fácil implementação numérica das expressões relevantes (as quais envolvem assim operações matriciais). Designa-se por $\|\mathbf{a}\|$ a norma do vetor \mathbf{a} e por \mathbf{A}^t a transposta da matriz \mathbf{A} .

As grandezas escalares indicam-se por letras em *itálico* e esta notação aplica-se também às componentes de matrizes e vetores. Contudo, frequentemente, estas componentes são também matrizes e/ou vetores, sendo nesse caso representadas como tal.

As derivadas parciais são representadas através de uma vírgula em índice inferior, seguida da variável em relação à qual se está a derivar (e.g., se $a = a(x, y, z)$, então $a_{,x} = \partial a / \partial x$).

Como será visto na secção 2.3 algumas grandezas podem ser divididas numa parcela de membrana e numa parcela de flexão. Os termos de membrana são assinalados em índice superior pela letra M e os termos de flexão pela letra F . Uma variação virtual é representada por δ e uma variação incremental/iterativa (no contexto do método de Newton-Raphson) por Δ . Caso não seja necessário especificar a natureza da variação, utiliza-se um d .

2.3 Equações fundamentais

De acordo com a notação habitual da GBT, o campo de deslocamentos de cada parede é dado pelo vetor

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde U_x, U_y, U_z designam as componentes do deslocamento segundo cada um dos eixos locais da parede (x, y, z) , os quais são indicados na figura 2.3.

Na hipótese dos pequenos deslocamentos, as componentes do tensor de deformação são

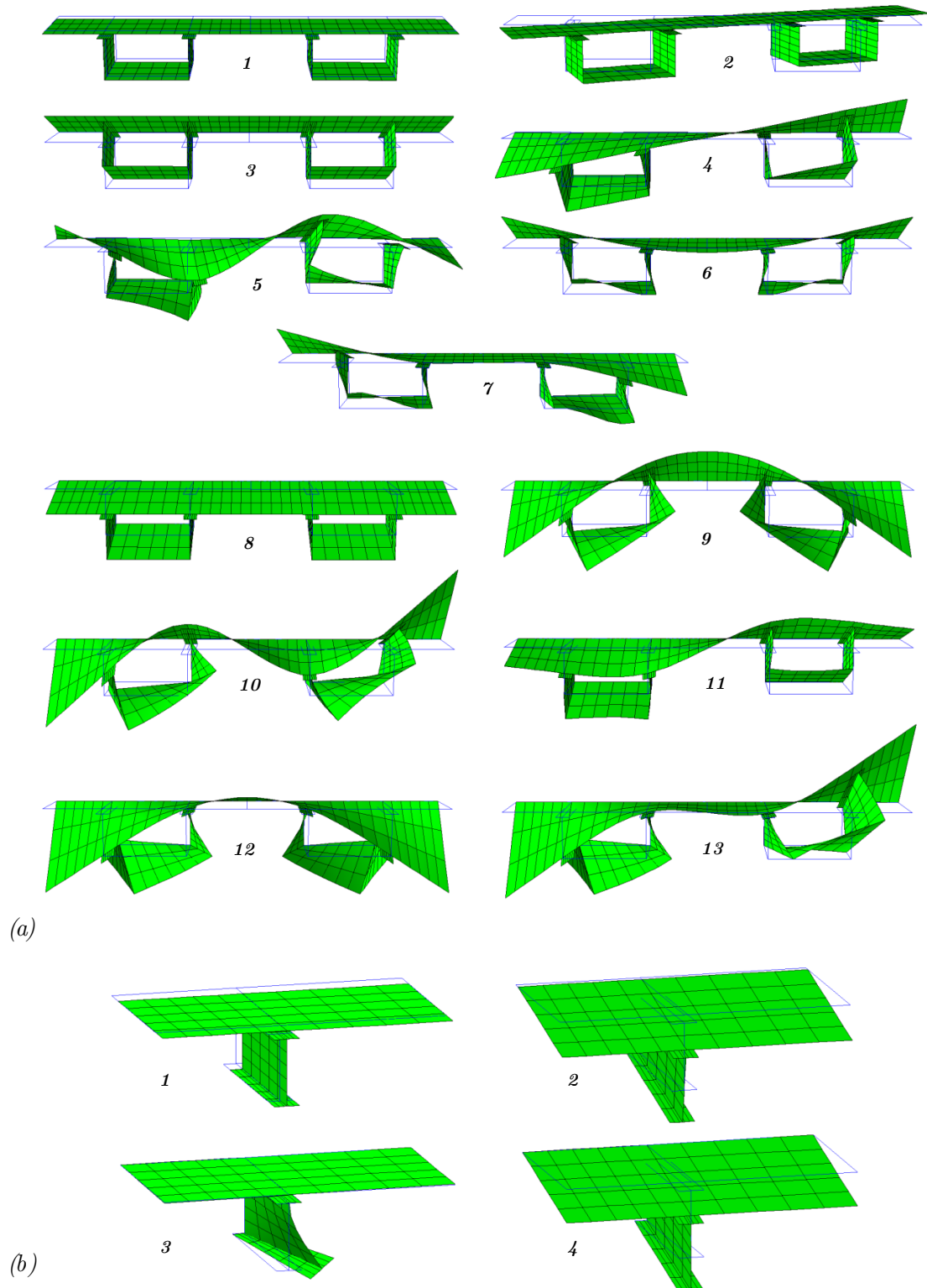


Figura 2.1: Modos de deformação de secções de pontes mistas aço-betão: (a) secção com dois caixões, (b) secção “bi-viga” com simplificação de simetria — apenas metade da secção transversal é representada. Extraído de Gonçalves e Camotim (2010).

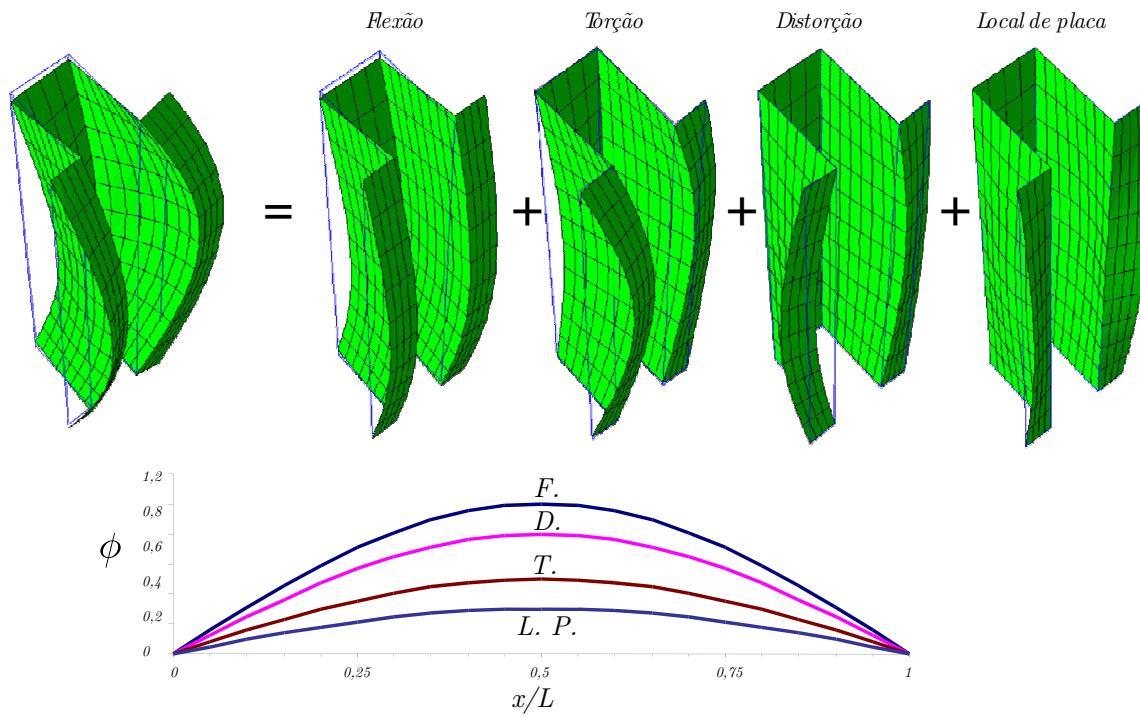


Figura 2.2: Configuração deformada de uma barra com secção em “hat” e respetiva decomposição modal (extraído de Gonçalves, 2014)

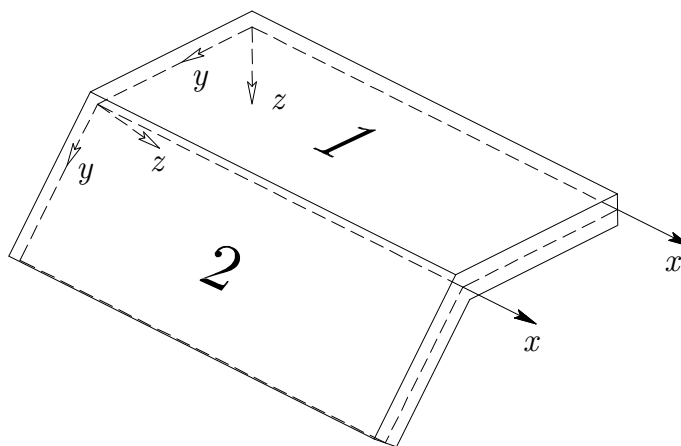
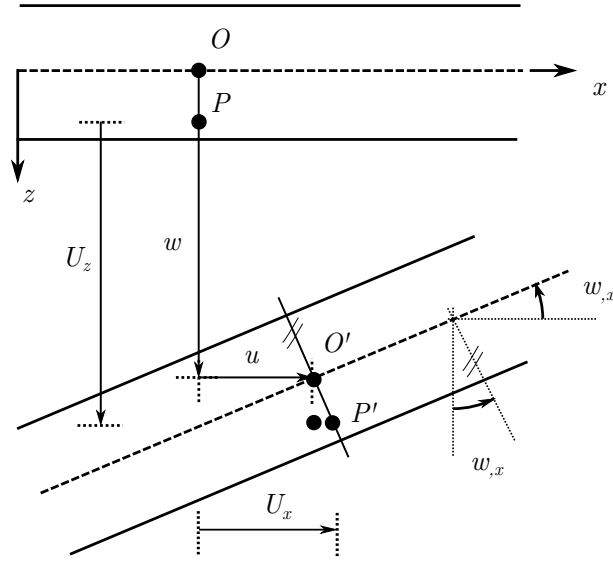


Figura 2.3: Secção arbitrária de parede fina com eixos locais de cada parede (adaptado de Gonçalves e Camotim, 2011)


 Figura 2.4: Ilustração da hipótese de Kirchhoff (neste caso $w_{,x} < 0$)

dadas por

$$\varepsilon_{xx} = U_{x,x}, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{yy} = U_{y,y}, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{zz} = U_{z,z}, \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = U_{x,y} + U_{y,x}, \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = U_{x,z} + U_{z,x}, \quad (2.6)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = U_{z,y} + U_{y,z}, \quad (2.7)$$

as quais se podem agrupar sob uma forma matricial, ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Tendo em conta que as paredes são finas, é possível utilizar a hipótese de Kirchhoff, que corresponde a admitir que as fibras normais ao plano médio da laje permanecem indeformáveis e perpendiculares ao plano médio da laje após deformação, tem-se

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad (2.9)$$

e a eliminação destas componentes permite escrever o tensor de deformação na seguinte forma vetorial

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Em virtude de se ter adotado a hipótese de Kirchhoff, é possível escrever o deslocamento de um ponto genérico P da parede em função apenas do deslocamento do plano médio da

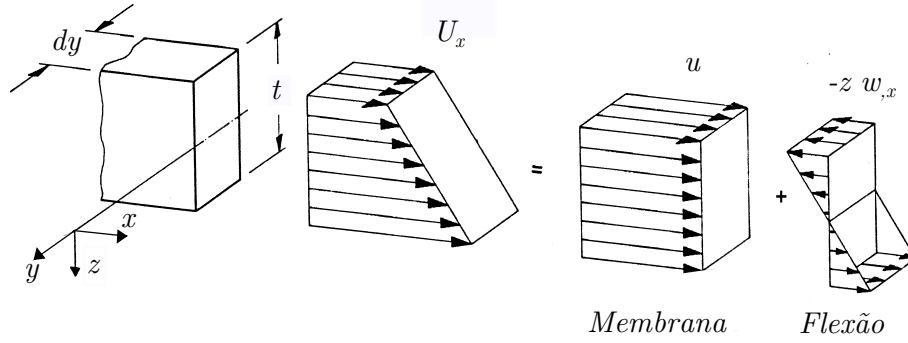


Figura 2.5: Parcela de membrana u e de flexão $-zw_{,x}$ de U_x (adaptado de Schardt, 1989)

respetiva parede. Esta afirmação é demonstrada na figura 2.4, relativa ao plano xz : designando por u, w as componentes do deslocamento do plano médio da parede segundo x, z , respetivamente, o deslocamento do ponto P , situado à cota z , pode ser escrito como

$$U_x^P = u - z w_{,x}, \quad (2.11)$$

$$U_z^P = w. \quad (2.12)$$

Efetuando o mesmo raciocínio para o plano perpendicular obtém-se

$$U_y^P = v - z w_{,y}, \quad (2.13)$$

onde v é a componente do deslocamento do plano médio da parede segundo y . Assim, o campo de deslocamentos (2.1) é definido como

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u - z w_{,x} \\ v - z w_{,y} \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Note-se que as componentes U_x e U_y podem ser divididas numa parcela de membrana (dependente de u e v) e numa parcela de flexão (dependente de $-zw_x$ e $-zw_y$) — a figura 2.5 ilustra esta subdivisão para o caso particular de U_x .

Tal como já foi brevemente referido na secção 2.1, na descrição cinemática da GBT o campo de deslocamentos é definido através de uma combinação linear de “modos de deformação” da secção transversal, cujas amplitudes ao longo do eixo da barra são dados pelas respetivas funções de amplitude. Tendo em conta que apenas os deslocamentos u, v, w necessitam ser definidos, tem-se

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k(y) \varphi_k(x) = \bar{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\varphi}, \quad (2.15)$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{v}_k(y) \phi_k(x) = \bar{\mathbf{v}}^t \boldsymbol{\phi}, \quad (2.16)$$

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{w}_k(y) \psi_k(x) = \bar{\mathbf{w}}^t \boldsymbol{\psi}, \quad (2.17)$$

onde $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k$ são funções em y e representam as componentes do modo de deformação k ($\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$ são as suas formas vectoriais) e $\varphi_k, \phi_k, \psi_k$ são as respectivas funções de amplitude (em x , sendo as formas vectoriais dadas por $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}$). Naturalmente, todos os vetores têm dimensão igual ao número de modos de deformação (N).

O problema da determinação dos modos de deformação (i.e., das funções $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k$) para secções de geometria poligonal arbitrária tem sido objeto de análise em variados trabalhos (ver, por exemplo, Schardt, 1989; Dinis et al., 2006; Gonçalves et al., 2010). Como o presente trabalho aborda um problema muito específico, que apenas requer a determinação de alguns modos de deformação, este assunto é apenas brevemente abordado no Capítulo 3, com aplicação direta aos casos a estudar. Contudo, deve referir-se que os modos de deformação podem ser obtidos, rapidamente e eficazmente, utilizando o programa *freeware* GBTUL, o qual está disponível em <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>.

Na maioria das análises da GBT é admitida como válida a hipótese de Vlasov, segundo a qual as distorções de membrana no plano médio são nulas, ou seja, $\gamma_{xy}^M = 0$. Desenvolvendo o termo γ_{xy}^M tendo em conta as expressões anteriores, tem-se

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^M &= u_{k,y} + v_{k,x} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \bar{u}_k(y) \varphi_k(x) \right)_{,y} + \left(\sum_{k=1}^n \bar{v}_k(y) \phi_k(x) \right)_{,x} \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{u}_{k,y}(y) \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^n \bar{v}_k(y) \phi_{k,x}(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para que esta expressão se anule, é necessário que se verifiquem simultaneamente as seguintes condições

$$\begin{cases} \bar{u}_{k,y}(y) = -\bar{v}_k(y), \\ \varphi_k(x) = \phi_{k,x}(x). \end{cases} \quad (2.19)$$

Assim, para que $\gamma_{xy}^M = 0$, é necessário que as componentes \bar{u} e \bar{v} de cada modo estejam relacionadas e que as respectivas funções de amplitude também estejam relacionadas.

A existência de deslocamentos \bar{v} numa secção transversal promove deslocamentos \bar{w} , de forma a respeitar as condições de compatibilidade — por exemplo, se duas paredes formam um ângulo de 90° entre si, na aresta comum os deslocamentos \bar{v} de uma parede têm de ser iguais aos deslocamentos \bar{w} da outra e vice-versa. Conclui-se então que, para não violar a compatibilidade, as funções de amplitude de \bar{v} e \bar{w} têm necessariamente de respeitar

$$\phi_k(x) = \psi_k(x). \quad (2.20)$$

Assim, em vez das equações (2.15)–(2.17), pode escrever-se antes

$$u(x, y) = \bar{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\phi}_{,x}, \quad (2.21)$$

$$v(x, y) = \bar{\mathbf{v}}^t \boldsymbol{\phi}, \quad (2.22)$$

$$w(x, y) = \bar{\mathbf{w}}^t \boldsymbol{\phi}. \quad (2.23)$$

Para facilitar a escrita das equações subseqüentes e a sua implementação numérica, tendo em conta (2.21)–(2.23), escreve-se agora (2.14) como

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \boldsymbol{\Xi}_U(y) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(x) \\ \boldsymbol{\phi}_{,x}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_U(y) = \boldsymbol{\Xi}_U^M(y) + z \boldsymbol{\Xi}_U^F(y), \quad (2.25)$$

Capítulo 2. Fundamentos da Teoria Generalizada de Vigas

onde as matrizes auxiliares Ξ_U^M e Ξ_U^F dizem respeito às componentes de membrana (M) e flexão (F), sendo definidas como

$$\Xi_U^M(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{v}}^t(y) & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}}^t(y) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Xi_U^F(y) = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{w}}_{,y}^t(y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Para as deformações tem-se ainda

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}^F = \Xi_\varepsilon(y) \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi_{,x}(x) \\ \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\Xi_\varepsilon(y) = \Xi_\varepsilon^M(y) + z\Xi_\varepsilon^F(y), \quad (2.28)$$

onde as matrizes auxiliares para os termos de membrana e flexão são dadas por

$$\Xi_\varepsilon^M(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{v}}_{,y}^t(y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\bar{\mathbf{u}}_{,y}(y) + \bar{\mathbf{v}}(y))^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\Xi_\varepsilon^F(y) = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^t(y) \\ 2\bar{\mathbf{w}}_{,yy}^t(y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}_{,y}^t(y) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Admitindo que as paredes estão submetidas a um estado plano de tensão, com $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, as componentes não-nulas do tensor das tensões podem ser agrupadas no vetor

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

A forma incremental geral das relações constitutivas é escrita como

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.32)$$

onde \mathbf{C}_t é o operador constitutivo tangente para estados planos de tensão, cujas componentes dependem da lei material utilizada (ver Capítulo 3), e as variações de $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ possuem as componentes definidas por (2.31) e (2.10).

Admitindo que existem apenas cargas $\bar{\mathbf{f}}^t = [\bar{f}_x \ \bar{f}_y \ \bar{f}_z]$ aplicadas na superfície média das paredes, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, as equações de equilíbrio são dadas por

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_\Omega \delta \mathbf{U}^t \bar{\mathbf{f}} \, d\Omega = 0, \quad (2.33)$$

onde V e Ω designam o volume e a superfície média da barra, respetivamente. Tendo em conta as equações (2.27) e (2.24), obtém-se

$$\begin{aligned} & \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \\ \Leftrightarrow & - \int_V \left(\Xi_\varepsilon(y) \begin{bmatrix} \delta \phi(x) \\ \delta \phi_{,x}(x) \\ \delta \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix} \right)^t \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_\Omega \left(\Xi_U^M(y) \begin{bmatrix} \delta \phi(x) \\ \delta \phi_{,x}(x) \end{bmatrix} \right)^t \bar{\mathbf{f}} \, d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

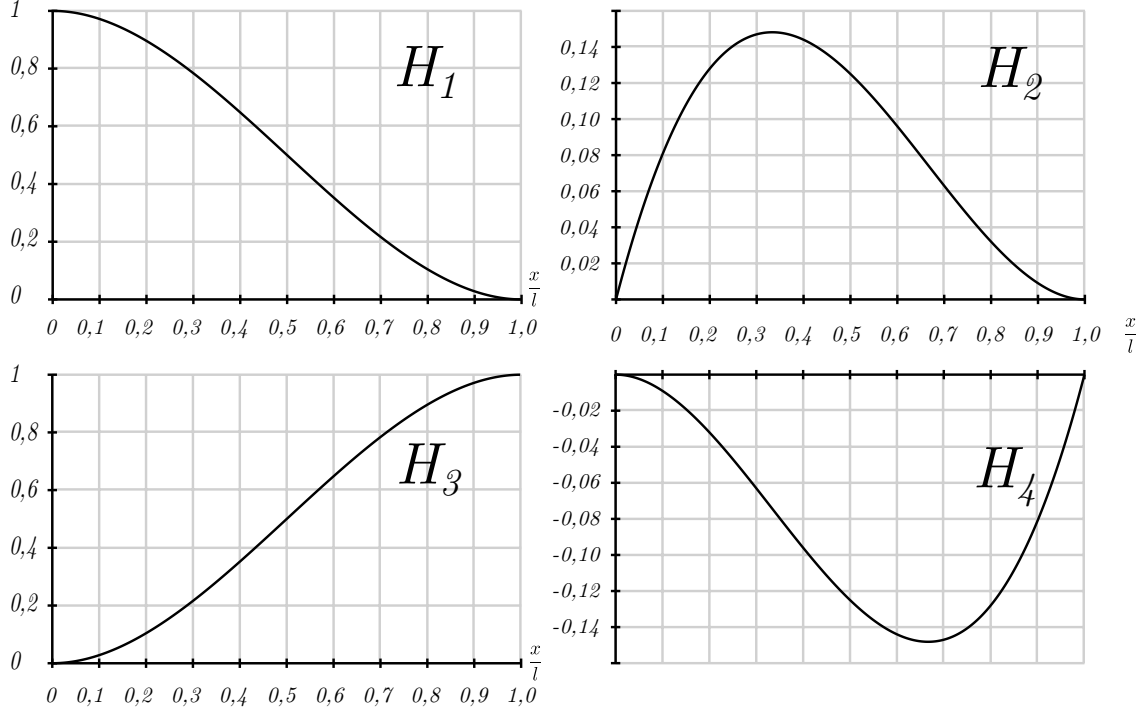


Figura 2.6: Funções de interpolação de Hermite

A resolução das equações (2.34) pelo método de Newton-Raphson requer a sua linearização na “direção” de uma variação incremental/iterativa Δ . Tendo em conta (2.32) e notando que $\delta\Delta\phi = 0$, obtém-se imediatamente

$$\begin{aligned} \Delta\delta W_{int} + \Delta\delta W_{ext} = & - \int_V \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \\ \delta\phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}^t \Xi_{\varepsilon}^t(y) C_t \Xi_{\varepsilon}(y) \begin{bmatrix} \Delta\phi(x) \\ \Delta\phi_{,x}(x) \\ \Delta\phi_{,xx}(x) \end{bmatrix} dV \\ & + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta\phi(x) \\ \delta\phi_{,x}(x) \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M(y))^t \Delta\bar{f} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Esta expressão será utilizada na secção 2.4 para a formulação do elemento finito proposto.

2.4 Formulação de um elemento finito

Nesta secção descreve-se o elemento finito obtido por Gonçalves e Camotim (2011, 2012). Este elemento é obtido através da interpolação das funções de amplitude, segundo a forma

$$\phi(x) = \Psi(x)d \quad (2.36)$$

onde o vetor-coluna ϕ já foi introduzido, a matriz Ψ contém as funções de interpolação e o vetor d engloba as incógnitas do problema (valores nodais das funções de amplitude e das suas derivadas).

Tendo em conta que surge uma primeira derivada em ordem a x na componente U_x (ver Eq. (2.14)), a compatibilidade exige que as funções de interpolação sejam de classe C^1 para

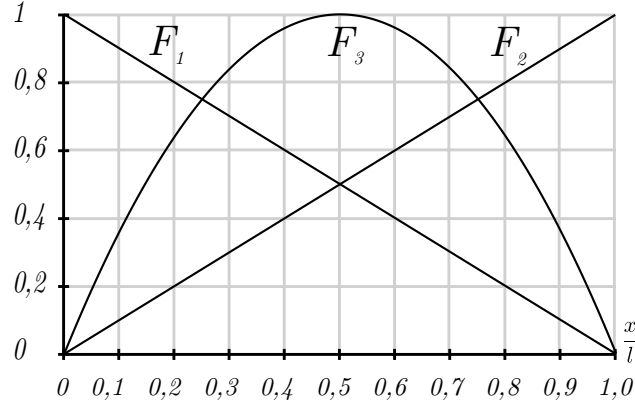


Figura 2.7: Funções de interpolação de Lagrange

os modos com $\bar{w} \neq 0$. Tal requisito permite satisfazer também (2.21). Para estes modos são utilizadas funções de interpolação cúbicas de Hermite, as quais são definidas como

$$H_1 = 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1, \quad (2.37)$$

$$H_2 = l \left(\left(\frac{x}{l} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right), \quad (2.38)$$

$$H_3 = -2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2, \quad (2.39)$$

$$H_4 = l \left(\left(\frac{x}{l} \right)^3 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right), \quad (2.40)$$

onde l designa o comprimento do elemento finito. Estas funções estão representadas nos gráficos da figura 2.6. Recorrendo a estas funções, podemos aproximar as funções de amplitude do modo k através de

$$\phi_k(x) = H_1 \phi_k(0) + H_2 \phi_{k,x}(0) + H_3 \phi_k(l) + H_4 \phi_{k,x}(l). \quad (2.41)$$

Para os modos com deslocamentos axiais apenas (ou “modos de empenamento”, $\bar{u}_k \neq 0, \bar{v}_k = 0$ e $\bar{w}_k = 0$), a função de amplitude surge derivada em ordem a x (ver (2.21)). Para estes modos não se exige continuidade das funções mas sim continuidade da primeira derivada. Caso se utilizasse funções de Hermite, a função de amplitude seria dada por

$$\phi_{k,x}(x) = H_{1,x} \phi_k(0) + H_{2,x} \phi_{k,x}(0) + H_{3,x} \phi_k(l) + H_{4,x} \phi_{k,x}(l). \quad (2.42)$$

Neste caso note-se que $H_{1,x} = 6 \frac{x^2}{l^3} - 6 \frac{x}{l^2} = -H_{3,x} = 6 \frac{x^2}{l^3} - 6 \frac{x}{l^2}$, pelo que as funções utilizadas são linearmente dependentes. Para contornar esta situação (para os modos com deslocamentos axiais apenas), são usadas funções lineares e quadráticas que equivalem aos polinómios de Lagrange (ver figura 2.7). Estas funções são dadas por

$$F_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad (2.43)$$

$$F_2 = \frac{x}{l}, \quad (2.44)$$

$$F_3 = 4 \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right). \quad (2.45)$$

Assim, a aproximação de $\phi_{k,x}(x)$ por estas funções é dada por

$$\phi_{k,x}(x) = F_1\phi_{k,x}(0) + F_3\phi_{k,x}(l/2) + F_2\phi_{k,x}(l). \quad (2.46)$$

Juntando as funções de interpolação utilizadas, tem-se um elemento finito de três nós, onde o primeiro nó ($x = 0$) está relacionado com F_1, H_1 e H_2 , o segundo nó ($x = \frac{l}{2}$) diz respeito apenas à função F_3 e o terceiro nó ($x = l$) está associado a F_2, H_3 e H_4 .

Considerando um total de N modos onde os primeiros N_w são modos de empenamento (ou *warping* na designação em língua inglesa), a matriz Ψ possui dimensão $N \times (4N - N_w)$ e organiza-se da seguinte forma

$$\Psi = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} P(\tilde{F}_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\tilde{F}_3) & P(\tilde{F}_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{H}_3 & \tilde{H}_4 \end{array} \right], \quad (2.47)$$

onde \tilde{A} designa uma matriz diagonal que contém na sua diagonal a função A e com dimensão igual ao número de modos de deformação associados.

A expressão $P(A)$ representa a primitiva da função A em relação a x e a necessidade da sua introdução deve-se ao facto de (2.21) envolver primeiras derivadas (em função de x). Assim, o vetor \mathbf{d} possui $4N - N_w$ entradas e é dado por

$$\mathbf{d} = \left[\begin{array}{c} \phi_{1,x}(0) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(0) \\ \hline \phi_{N+1,x}(0) \\ \vdots \\ \phi_{4N-N_w,x}(0) \\ \hline \phi_{N+1,x}(0) \\ \vdots \\ \phi_{4N-N_w,x}(0) \\ \hline \phi_{1,x}(l/2) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(l/2) \\ \hline \phi_{1,x}(l) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(l) \\ \hline \phi_{N+1,x}(l) \\ \vdots \\ \phi_{4N-N_w,x}(l) \\ \hline \phi_{N+1,x}(l) \\ \vdots \\ \phi_{4N-N_w,x}(l) \end{array} \right]. \quad (2.48)$$

Para obter as expressões finais para a implementação do elemento finito, tendo em conta (2.36), basta substituir, em (2.34) e (2.35),

$$\delta\phi = \Psi\delta d, \quad (2.49)$$

$$\Delta\phi = \Psi\Delta d, \quad (2.50)$$

$$\delta\phi_{,x} = \Psi_{,x}\delta d, \quad (2.51)$$

$$\Delta\phi_{,x} = \Psi_{,x}\Delta d, \quad (2.52)$$

$$\delta\phi_{,xx} = \Psi_{,xx}\delta d, \quad (2.53)$$

$$\Delta\phi_{,xx} = \Psi_{,xx}\Delta d. \quad (2.54)$$

Assim, o trabalho virtual (2.34) é dado por

$$-\delta d \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t \sigma dV + \delta d^t \int_\Omega \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t \bar{f} d\Omega = 0. \quad (2.55)$$

Nesta expressão, é possível identificar o vetor das forças internas \mathbf{Q} ,

$$\mathbf{Q} = \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t \sigma dV, \quad (2.56)$$

e o vetor das forças externas \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} = \int_\Omega \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t \bar{f} d\Omega. \quad (2.57)$$

O vetor das forças desequilibradas \mathbf{g} obtém-se através da subtração $\mathbf{Q} - \mathbf{F}$, sendo dado por

$$\mathbf{g} = \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t \sigma dV - \int_\Omega \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t \bar{f} d\Omega \quad (2.58)$$

A linearização do trabalho virtual (2.35) conduz agora a

$$-\delta d^t \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t C_t \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV \Delta d + \delta d^t \int_\Omega \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t \Delta \bar{f} d\Omega, \quad (2.59)$$

sendo possível identificar a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t e o vetor das forças exteriores incrementais, ou seja,

$$\mathbf{K}_t = \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t C_t \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV, \quad (2.60)$$

$$\Delta \mathbf{F} = \int_\Omega \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t \Delta \bar{f} d\Omega. \quad (2.61)$$

Em Gonçalves e Camotim (2011,2012) utilizou-se o elemento finito descrito para analisar barras de parede fina com material elastoplástico. Nesses trabalhos mostrou-se que se obtêm resultados muito precisos com poucos modos de deformação e que, em geral, é suficiente efetuar integrações numéricas com 3 pontos de integração em x e y , em cada parede. Na integração em z é necessário considerar mais do que 2 pontos sempre que a deformação de flexão (i.e., deformação variável na espessura) afete significativamente a resposta estrutural.

Capítulo 3

Aplicação à análise fisicamente não-linear de vigas mistas

3.1 Introdução

Como foi referido no Capítulo 1, a GBT foi já aplicada para estudar o comportamento de vigas mistas aço-betão, considerando que os materiais exibem um comportamento elástico linear (Gonçalves e Camotim, 2010; Amaral, 2011). Em particular, nestes trabalhos, a GBT foi utilizada para efetuar análises (i) lineares (estáticas), (ii) de vibração (frequências naturais e modos de vibração) e (iii) de estabilidade (determinação de momentos críticos relativos à encurvadura lateral do banzo inferior, em zonas de momento negativo), considerando os efeitos do *shear lag*, da distorção da secção e da flexibilidade da conexão de corte entre os banzos de betão e o perfil de aço. No presente Capítulo, a formulação da GBT apresentada no Capítulo 2 é particularizada para vigas mistas aço-betão com comportamento fisicamente não-linear, tendo em conta os efeitos de *shear lag*. Na secção 3.2 discutem-se as hipóteses simplificativas assumidas e os modos de deformação utilizados. As leis constitutivas para o aço e betão aplicadas nos exemplos estudados são apresentadas na secção 3.3. Os detalhes relacionados com a implementação da formulação em *MATLAB* são abordados na secção 3.4. Finalmente, na secção 3.5, são apresentados vários exemplos de aplicação. Para efeitos de validação, são utilizados resultados de ensaios experimentais (Ansourian, 1982) e resultados obtidos com modelos de elementos finitos convencionais, utilizando os programas *ADINA* (Bathe, 2014) e *ATENA* (Cervenka, 2013). Em particular, são analisados os seguintes exemplos de aplicação:

1. Na secção 3.5.1 estuda-se o efeito de *shear lag* em vigas simplesmente apoiadas sujeitas a momento positivo (betão à compressão), assumindo que todos os materiais exibem um comportamento elástico.
2. Na secção 3.5.2 investiga-se a influência do número de elementos finitos na determinação do comprimento da zona fendilhada de uma viga encastrada-apoiada, assumindo que todos os materiais têm comportamento elástico e que não ocorrem efeitos de *shear lag* (banzos “curtos”).
3. Na secção 3.5.3 considera-se mais uma vez o efeito de *shear lag* em vigas simplesmente apoiadas, mas agora sujeitas a cargas ascendentes, o que causa a fendilhação generalizada do betão.

4. Na secção 3.5.4 analisa-se uma viga encastrada-apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída. Para além dos efeitos de *shear lag*, considera-se a fendilhação do betão (embora admitindo materiais elásticos) e a variação da rigidez de corte no betão por efeito da fendilhação.
5. Na secção 3.5.5 efetuam-se comparações com resultados experimentais de Ansourian (1982) e numéricos (Pi et al. 2006). É introduzido o comportamento não-linear do betão à compressão (para além da fendilhação) e do aço (plasticidade). Neste caso não ocorrem fenómenos de *shear lag*.
6. Finalmente, nas secções 3.5.6 e 3.5.7, consideram-se os efeitos fisicamente não-lineares e de *shear lag*.

3.2 Hipóteses simplificativas adicionais e modos de deformação

De forma a evitar a utilização de modelos constitutivos muito complexos, consideram-se hipóteses simplificativas adicionais às introduzidas no Capítulo 2, nomeadamente ao nível das tensões e deformações. Em particular: (1) as paredes são consideradas indeformáveis segundo y ($\varepsilon_{yy}^M = \varepsilon_{yy}^B = 0$), (2) a rotação das paredes no plano da secção é desprezada ($\gamma_{xy}^B = 0$) e (3) a deformação por corte de membrana ($\gamma_{xy}^M = 0$) é apenas permitida na alma do perfil metálico e na laje de betão (por *shear lag*). Estas simplificações, que equivalem à introdução de “constrangimentos cinemáticos”, resultam na limitação do número de modos de deformação admissíveis e, conseqüentemente, na diminuição do número de graus de liberdade necessários para descrever a configuração da viga, sem que tal afete significativamente a precisão dos resultados.

Como foi visto no Capítulo 2, a GBT assume que as paredes constituintes da secção estão sujeitas a um estado plano de tensão. No presente caso, em virtude das hipóteses simplificativas adicionais adotadas relativamente ao campo de deformação, impõe-se $\sigma_{yy} = 0$. Estas hipóteses permitem escrever

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

A consideração de $\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy} = 0$ é naturalmente inconsistente para $\nu \neq 0$, mas tal não afeta significativamente os resultados obtidos (ver secção 3.5). No caso da armadura na laje de betão, tem-se ainda $\sigma_{xy} = 0$, em virtude do seu funcionamento uniaxial.

Admite-se que a secção transversal da viga mista é composta por um perfil de aço com secção em I e uma laje de betão armado, tal como representado na figura 3.1. Admite-se ainda que a secção é constante ao longo de cada elemento finito. Para efeitos de modelação, a secção é reduzida à linha média das paredes e discretizada de acordo com a figura 3.2 (note-se os eixos locais de cada parede): as paredes 1 e 2 correspondem à laje de betão (com separação entre elas no eixo da alma do perfil), as paredes 3, 4 e 5 correspondem ao perfil de aço e as paredes 6 e 7 à armadura de aço (com separação entre elas no eixo da alma do perfil). É importante salientar que se admite que não existe escorregamento entre a armadura e o betão.

Os modos de deformação utilizados nas análises refletem os efeitos que se pretendem modelar, nomeadamente: a flexão (reta), a deformação por esforço transversal na alma do

3.2. Hipóteses simplificativas adicionais e modos de deformação

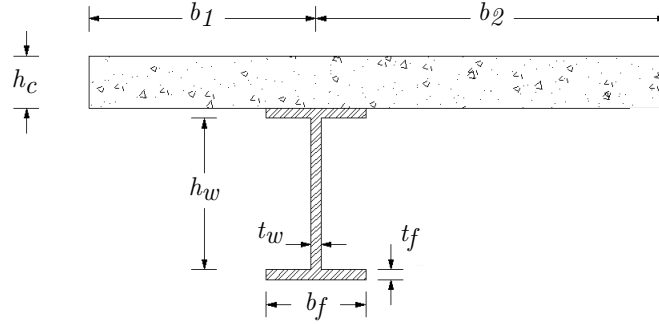


Figura 3.1: Secção-tipo de uma viga mista aço-betão (adaptado de Amaral, 2011)

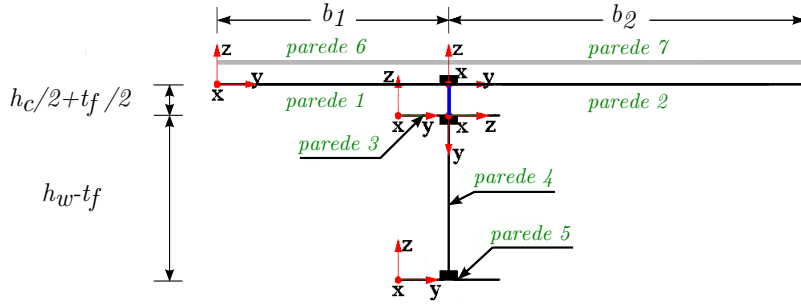


Figura 3.2: Discretização da secção-tipo (adaptado de Amaral, 2011)

perfil e a deformação por *shear lag* no banzo de betão. Assim, em geral, consideraram-se os seguintes modos: extensão axial, flexão (Euler-Bernoulli), modos de *shear lag* e modo de empenamento associado à flexão. A utilização de modos de outras naturezas (e.g., envolvendo a flexão transversal, a extensão das paredes no plano da secção transversal, etc.) melhoraria naturalmente a precisão da solução, mas por outro lado tornaria necessário considerar mais componentes de tensão e deformação (logo leis constitutivas mais complexas) e mais graus de liberdade. De seguida descrevem-se e calculam-se os modos de deformação utilizados. A sua representação é obtida através de um programa desenvolvido em *MATLAB*, considerando uma função de amplitude linear, ou seja, $\phi = x$.

Em primeiro lugar, considere-se o modo de extensão axial, o qual é representado na figura 3.3. Este modo refere-se a um deslocamento unitário da secção segundo x , tratando-se portanto de um deslocamento de corpo rígido. Note-se que este modo é fundamental no contexto da modelação de vigas mistas, dado que permite a correção da posição da linha neutra devido aos efeitos de *shear lag* e fendilhação do betão.

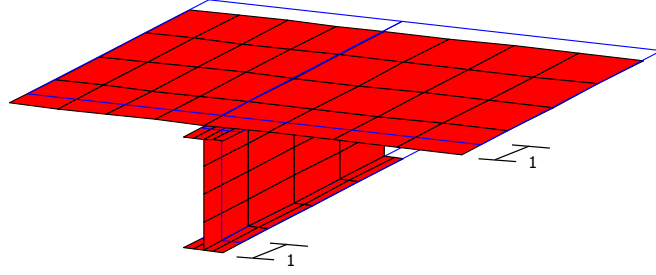


Figura 3.3: Modo de deformação de extensão axial

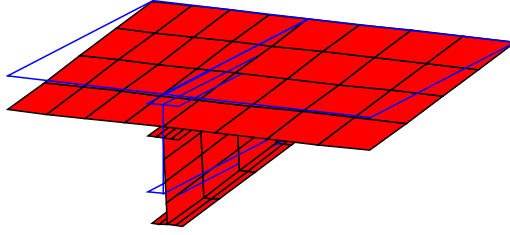


Figura 3.4: Modo de flexão pura

O modo de flexão é dado pela Teoria de Euler-Bernoulli, considerando que o betão não está fendilhado (ver figura 3.4). Este modo permite caracterizar o efeito global da flexão na viga (o principal efeito registado nos exemplos de aplicação). Para a determinação das respetivas funções de \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} em todas as paredes, é necessário obter a posição da linha neutra elástica, a qual é dada por

$$Y_{LN} = \frac{\sum_i E_i A_i y_i}{\sum_j E_j A_j}, \quad (3.2)$$

onde E_i , A_i e y_i são, respetivamente, o módulo de elasticidade a área e a posição do centróide do material i relativamente a um eixo de referência. Adotando para referência a linha média da laje de betão, tem-se para as paredes 1 e 2

$$\bar{u}(y) = Y_{LN}, \quad \bar{v}(y) = 0, \quad \bar{w}(y) = -1. \quad (3.3)$$

Para a parede 3 (banzo superior do perfil) tem-se

$$\bar{u}(y) = Y_{LN} - \frac{h_c}{2}, \quad \bar{v}(y) = 0, \quad \bar{w}(y) = -1 \quad (3.4)$$

A alma do perfil (parede 4) exhibe empenamento linear, ou seja,

$$\bar{u}(y) = Y_{LN} - \frac{h_c}{2} - y, \quad \bar{v}(y) = 1, \quad \bar{w}(y) = 0 \quad (3.5)$$

e note-se que, de acordo com a primeira equação de (2.19), tem-se $\gamma_{xy}^M = 0$ nesta parede, o que está de acordo com a Teoria de Euler-Bernoulli. Finalmente, para o banzo inferior (parede 5), obtém-se

$$\bar{u}(y) = -\frac{h_c}{2} - h_w + Y_{LN}, \quad \bar{v}(y) = 0, \quad \bar{w}(y) = -1. \quad (3.6)$$

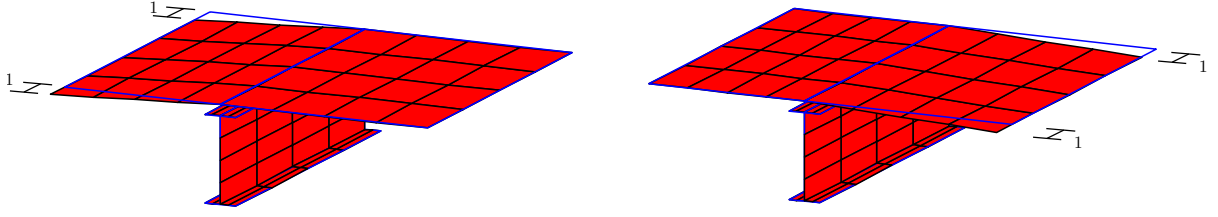


Figura 3.5: Modos de *shear lag* linear

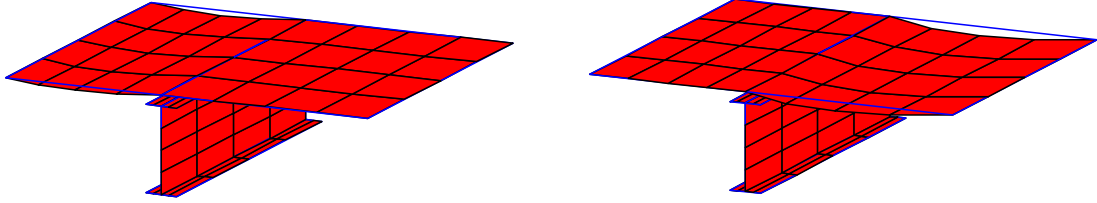


Figura 3.6: Modos de *shear lag* quadrático

Os modos de *shear lag* correspondem a um empenamento não-uniforme na laje de betão apenas, pelo que $\bar{v} = \bar{w} = 0$ em todas as paredes e $\bar{u} = 0$ nas paredes 3 a 5. Em geral, foram considerados modos com andamento linear e quadrático. Para um andamento linear, foram considerados deslocamentos unitários na extremidade, conforme representado na figura 3.5. A expressão que define o modo na parede 1 é

$$\bar{u}(y) = 1 - \frac{y}{b_1}, \quad (3.7)$$

em que b_1 é a largura da parede 1. Analogamente, para a parede 2, de largura b_2 tem-se

$$\bar{u}(y) = 1 - \frac{y}{b_2}. \quad (3.8)$$

Os modos quadráticos são dados por

$$\bar{u}(y) = y(b_1 - y), \quad (3.9)$$

$$\bar{u}(y) = y(b_2 - y), \quad (3.10)$$

para as paredes 1 e 2, respetivamente. Estes modos estão representados na figura 3.6, sendo possível observar que o empenamento é nulo nas extremidades das paredes.

Deve salientar-se que não existe qualquer dificuldade em considerar mais modos de *shear lag*, nomeadamente modos de grau superior. Contudo, conforme se verá mais à frente, os resultados obtidos com os modos lineares e quadráticos revelaram-se suficientemente satisfatórios.

Para problemas que exibem simetria em relação ao plano da alma do perfil, não existe qualquer vantagem em considerar modos individuais para cada parede, sendo nesse caso considerados os modos “combinados” representados na figura 3.7.

Finalmente, o modo de empenamento associado à flexão (ver figura 3.8) foi utilizado para permitir contabilizar a deformação por corte da alma do perfil. Este modo exhibe apenas deslocamentos longitudinais, os quais coincidem com os do modo de flexão. Note-se que não existe formalmente diferença em considerar para este modo os deslocamentos longitudinais ou

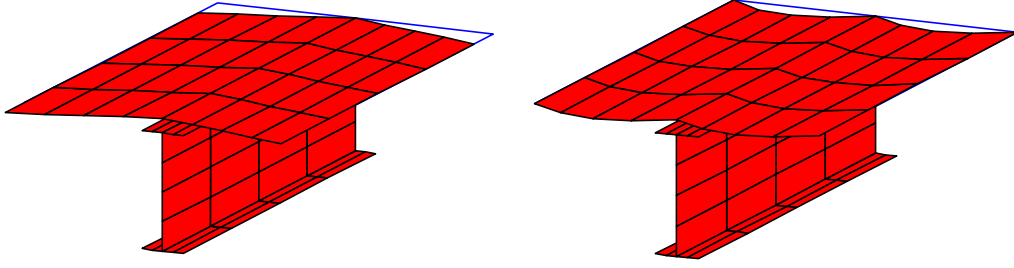


Figura 3.7: Modos de *shear lag* para problemas com simetria

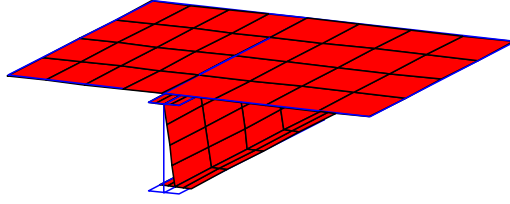


Figura 3.8: Modo de Empenamento de flexão

os deslocamentos no plano da secção do modo de flexão, dado que ambas as vias conduzem à mesma deformação por corte (constante na alma). Aliás, note-se que o deslocamento vertical da secção (de “corpo rígido”) pode ser reproduzido combinando os modos de flexão e do empenamento de flexão de modo a eliminar os deslocamentos axiais.

Para as paredes 1 e 2 obtêm-se as seguintes expressões

$$\bar{u}(y) = Y_{LN}, \quad \bar{v}(y) = 0, \quad \bar{w}(y) = 0. \quad (3.11)$$

Para a parede 3 tem-se

$$\bar{u}(y) = Y_{LN} - \frac{h_c}{2}, \quad \bar{v}(y) = 0, \quad \bar{w}(y) = 0. \quad (3.12)$$

Para a parede 4,

$$\bar{u}(y) = Y_{LN} - \frac{h_c}{2} - y, \quad \bar{v}(y) = 0, \quad \bar{w}(y) = 0 \quad (3.13)$$

e, finalmente, para a parede 5,

$$\bar{u}(y) = -\frac{h_c}{2} - h_w + Y_{LN}, \quad \bar{v}(y) = 0, \quad \bar{w}(y) = 0. \quad (3.14)$$

Agrupando os modos em vetores, para implementação computacional, tem-se para a componente \bar{u} (admite-se que as paredes 6 e 7 coincidem com as paredes 1 e 2),

$$\begin{aligned} \text{parede 1: } \bar{\mathbf{u}}^t &= [1 \quad 1 - \frac{y}{b_1} \quad 0 \quad y(b_1 - y) \quad 0 \quad Y_{LN} \quad Y_{LN}], \\ \text{parede 2: } \bar{\mathbf{u}}^t &= [1 \quad 0 \quad 1 - \frac{y}{b_2} \quad 0 \quad y(b_2 - y) \quad Y_{LN} \quad Y_{LN}], \\ \text{parede 3: } \bar{\mathbf{u}}^t &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_{LN} - \frac{h_c}{2} \quad Y_{LN} - \frac{h_c}{2}], \\ \text{parede 4: } \bar{\mathbf{u}}^t &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_{LN} - \frac{h_c}{2} - y \quad Y_{LN} - \frac{h_c}{2} - y], \\ \text{parede 5: } \bar{\mathbf{u}}^t &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_{LN} - \frac{h_c}{2} - h_w \quad Y_{LN} - \frac{h_c}{2} - h_w], \\ \text{parede 6: } \bar{\mathbf{u}}^t &= [1 \quad 1 - \frac{y}{b_1} \quad 0 \quad y(b_1 - y) \quad 0 \quad Y_{LN} \quad Y_{LN}], \\ \text{parede 7: } \bar{\mathbf{u}}^t &= [1 \quad 0 \quad 1 - \frac{y}{b_2} \quad 0 \quad y(b_2 - y) \quad Y_{LN} \quad Y_{LN}], \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde as componentes dizem respeito aos seguintes modos: (1) axial, (2-3) *shear lag* linear, (4-5) *shear lag* quadrático, (6) empenamento de flexão e (7) flexão. Note-se que, por uma questão de conveniência de implementação computacional, em primeiro lugar são colocados os modos que apenas envolvem deslocamentos axiais, para os quais se utilizam funções de interpolação de Lagrange (recordar a organização da matriz Ψ , da secção 2.4).

Para a componente \bar{v} tem-se

$$\begin{aligned} \text{parede 1: } \bar{v}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \text{parede 2: } \bar{v}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \text{parede 3: } \bar{v}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \text{parede 4: } \bar{v}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], \\ \text{parede 5: } \bar{v}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \text{parede 6: } \bar{v}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \text{parede 7: } \bar{v}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned} \tag{3.16}$$

e, para a componente \bar{w} ,

$$\begin{aligned} \text{parede 1: } \bar{w}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1], \\ \text{parede 2: } \bar{w}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1], \\ \text{parede 3: } \bar{w}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1], \\ \text{parede 4: } \bar{w}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \text{parede 5: } \bar{w}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1], \\ \text{parede 6: } \bar{w}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1], \\ \text{parede 7: } \bar{w}^t &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.3 Modelos Constitutivos

3.3.1 Modelo constitutivo para o aço

Para o aço adotou-se uma lei constitutiva simples, do tipo elástico-perfeitamente plástico (ver figura 3.9), à semelhança de trabalhos anteriores (Gonçalves e Camotim, 2011, 2012 e Freitas, 2011). Em particular, o comportamento em regime elástico corresponde ao do material de St. Venant-Kirchhoff e o comportamento plástico utiliza o critério de cedência de Mises-Hencky com lei de escoamento associada.

Tendo em conta as hipóteses simplificativas introduzidas, considera-se (i) um estado de tensão uniaxial nas armaduras e nos banzos do perfil e (ii) um estado de tensão com $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} \neq 0$ na alma do perfil. O primeiro caso (uniaxial) é bastante simples e a sua implementação não oferece dificuldades. O mesmo não se pode afirmar relativamente ao segundo caso, mas apenas houve que adaptar à linguagem do *MATLAB* as rotinas existentes. Muito embora a explicação detalhada do modelo constitutivo adotado na alma esteja fora do âmbito do presente trabalho, é de referir que o operador constitutivo para o caso elástico é dado por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

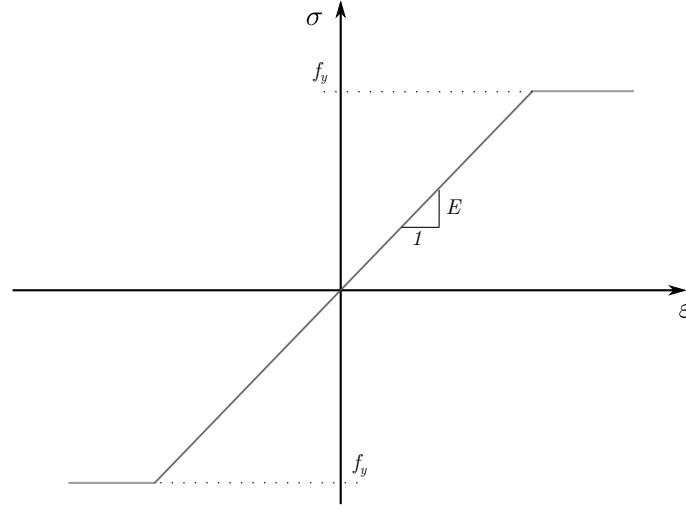


Figura 3.9: Lei uniaxial elástica-perfeitamente plástica

onde E e G são os módulos de elasticidade e distorção, respetivamente, e o critério de cedência escreve-se como

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xy}^2} - f_y = 0 \quad (3.19)$$

onde f_y é a tensão de cedência uniaxial. Em 3.4 são fornecidos mais alguns detalhes relativos à implementação deste modelo constitutivo. Em particular, são referidos os aspetos relacionados com a determinação das tensões após cada iteração e com a determinação do operador constitutivo tangente (\mathbf{C}_t).

Finalmente, salienta-se que esta lei constitutiva para o aço está obviamente implementada nos programas *ADINA* e *ATENA*, pelo que será utilizada nos respetivos modelos de elementos finitos.

3.3.2 Modelos constitutivos para o betão

3.3.2.1 Modelo implementado

No caso do betão, tal como na alma do perfil, considera-se um estado de tensão com $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} \neq 0$. Para evitar a utilização de uma lei constitutiva multiaxial, recorreu-se à introdução de hipóteses simplificativas adicionais. Em particular, em virtude da natureza dos problemas estudados, é de esperar que a tensão normal longitudinal σ_{xx} seja preponderante. Assim, adota-se uma lei constitutiva que é essencialmente uniaxial, sendo a influência das tensões de corte σ_{xy} considerada apenas de forma simplificada. Em particular, deve salientar-se que se admite sempre que as fendas se desenvolvem apenas segundo planos paralelos a yz .

A relação entre σ_{xx} e ε_{xx} é não-linear, admitindo-se que o betão não resiste à tração e que a resposta à compressão é descrita por (Saenz, 1964)

$$\sigma_{xx} = \frac{E_c \varepsilon_{xx}}{1 + \left(\frac{E_c}{\sigma_c/\varepsilon_c} - 2\right) \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_c} + \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_c}\right)^2}, \quad (3.20)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade do betão (tangente na origem), σ_c é a tensão de compressão máxima em provetes cilíndricos, ε_c é a deformação associada à máxima tensão de compressão

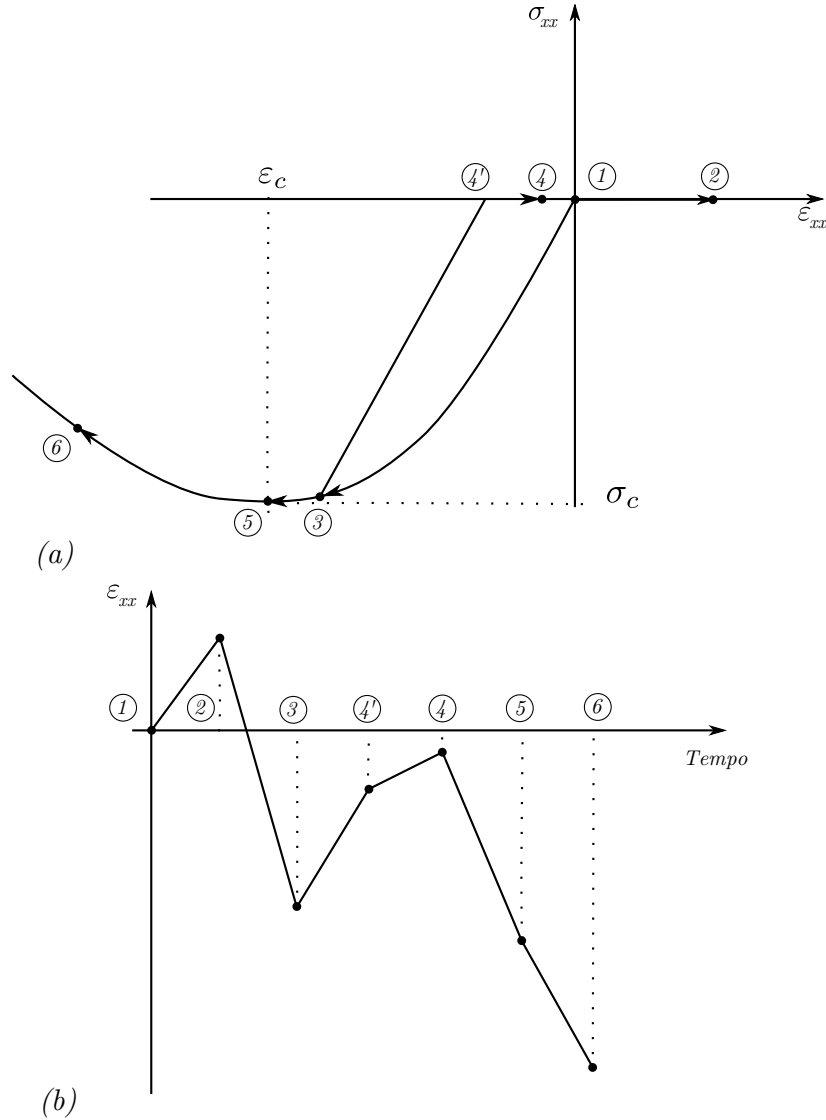


Figura 3.10: (a) Evolução das tensões no betão quando ocorre a sequência de deformação (b)

e todos os valores na expressão devem ser introduzidos em módulo. Deve salientar-se que esta expressão é utilizada neste trabalho apenas porque corresponde à utilizada por outros autores num dos exemplos apresentados na secção 3.5. Como é lógico, com o elemento finito proposto, não existe qualquer dificuldade em implementar qualquer outra lei uniaxial.

A lei uniaxial (3.20) não estabelece completamente o comportamento do material, nomeadamente quando ocorrem cargas/descargas e fendilhação. O gráfico de cima da figura 3.10 ilustra a evolução das tensões quando ocorre o historial de deformação indicado na parte de baixo da figura:

- Instantes 1 a 2: $\Delta\epsilon_{xx} > 0$, causando fendilhação ($\sigma_{xx} = 0$);
- Instantes 2 a 3: $\Delta\epsilon_{xx} < 0$, fechando as fendas e introduzindo compressão ($\sigma_{xx} < 0$);
- Instantes 3 a 4': $\Delta\epsilon_{xx} > 0$, provocando uma descarga elástica (declive E_c) até atingir $\sigma_{xx} = 0$;

- Instantes 4' a 4: $\Delta\epsilon_{xx} > 0$, causando nova fendilhação;
- Instantes 4 a 5: $\Delta\epsilon_{xx} < 0$, fechando as fendas e introduzindo novamente compressão até atingir a tensão máxima σ_c (note-se que a evolução das tensões é linear no troço 4'-3);
- Instantes 5 a 6: $\Delta\epsilon_{xx} < 0$, a tensão no betão decresce.

O módulo tangente é obtido derivando a expressão (3.20), o que fornece

$$E_t = \frac{d\sigma_{xx}}{d\epsilon_{xx}} = \frac{-(\epsilon_{xx}^2) - \epsilon_c^2}{(\epsilon_{xx}^2 \sigma_c + \epsilon_{xx} \epsilon_c (E_c \epsilon_c - 2\sigma_c) + \epsilon_c^2 \sigma_c)^2} E_c \epsilon_c^2 \sigma_c^2. \quad (3.21)$$

Esta expressão é utilizada na matriz constitutiva tangente, \mathbf{C}_t .

Relativamente às tensões tangenciais, caso o betão não se encontre fendilhado, admite-se uma relação elástica dada por

$$\sigma_{xy} = G_c \gamma_{xy}, \quad (3.22)$$

onde $G_c = E_c/2(1 + \nu_c)$ é o módulo de distorção elástico do betão e ν_c é o coeficiente de Poisson. Caso o betão se encontre fendilhado, as tensões são corrigidas para

$$\sigma_{xy} = \beta G_c \gamma_{xy}, \quad (3.23)$$

onde β é um fator de redução da rigidez ($0 \leq \beta \leq 1$) semelhante ao *shear retention factor* normalmente utilizado nos modelos clássicos de fenda fixa distribuída (ver por exemplo, Rots e Blaauwendraad, 1989). Os estados de tensão antes e após a formação de uma fenda estão ilustrados na figura 3.11.

Assim, a matriz constitutiva tangente é dada por

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} E_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

sendo que se considera $\beta = 1$ caso não ocorra fendilhação.

3.3.2.2 Modelos do ADINA e ATENA utilizados

No caso dos programas ADINA e ATENA, foram utilizados modelos constitutivos de fenda fixa distribuída. No ADINA, a lei constitutiva uniaxial para o betão (material CONCRETE, ver figura 3.12) é semelhante à utilizada no elemento finito da GBT (ver figura 3.10). No entanto, contabiliza adequadamente estados de tensão multiaxiais e permite a definição do comportamento à tração. Para o ramo comprimido, a lei uniaxial é dada por

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} = \frac{\left(\frac{E_c}{\sigma_c/\epsilon_c}\right) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)}{1 + A \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right) + B \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2 + C \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^3}, \quad (3.25)$$

com

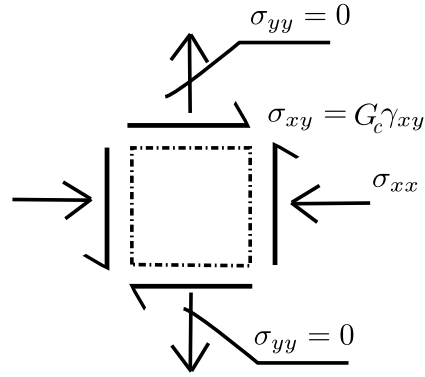
$$p = \epsilon_u/\epsilon_c, \quad (3.26)$$

$$A = \frac{\frac{E_c}{E_u} + (p^3 - 2p^2) \frac{E_c}{E_s} - (2p^3 - 3p^2 + 1)}{(p^2 - 2p + 1)p}, \quad (3.27)$$

$$B = \left(2 \frac{E_c}{E_s} - 3\right) - 2A, \quad (3.28)$$

$$C = \left(2 - \frac{E_c}{E_s}\right) + A, \quad (3.29)$$

Estado não fendilhado



Estado fendilhado

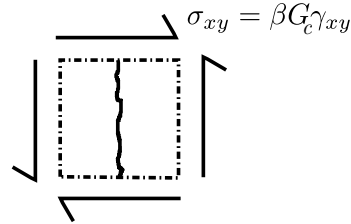


Figura 3.11: Estados de tensão antes e após a formação de uma fenda

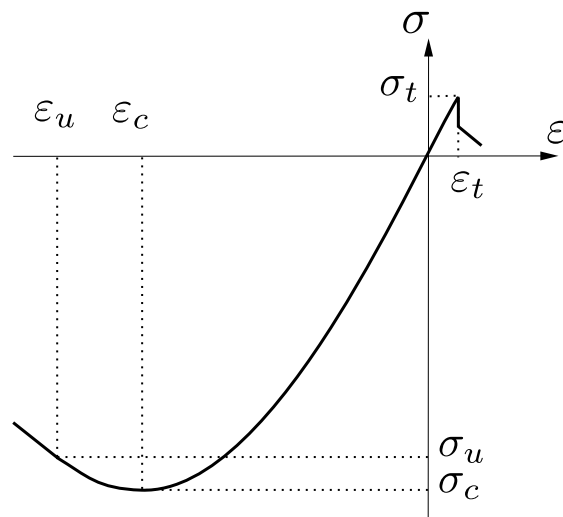


Figura 3.12: Lei constitutiva uniaxial para o betão no programa ADINA, (Bathe 2014).

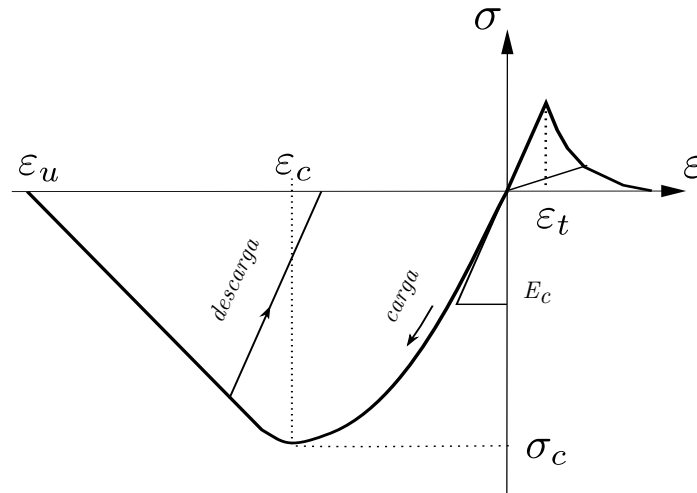


Figura 3.13: Lei constitutiva uniaxial para o betão no programa *ATENA*, (Cervenka, 2013).

onde $E_s = \sigma_c/\varepsilon_c$ e $E_u = \sigma_u/\varepsilon_u$. Para $\varepsilon < \varepsilon_u$, admite-se que a relação é linear até atingir tensão nula, com declive dado por $(\sigma_u - \sigma_c)/(\varepsilon_u - \varepsilon_c)$. As descargas são sempre elásticas, com declive E_c . É ainda de referir que neste modelo constitutivo é possível especificar um fator de redução da rigidez de corte para a zona fendilhada. No entanto, caso a resistência à tração seja considerada, a lei assume que a redução da rigidez é linear até $\sigma_{xx} = 0$, valor a partir do qual se atinge a redução especificada.

Nos modelos realizados com o programa *ATENA* utilizam-se elementos finitos de casca em estado plano de tensão, com a lei constitutiva *CC3DNonLinCementitious2*, sendo esta a lei recomendada nos manuais do programa (Cervenka, 2013). Trata-se de um modelo de fenda distribuída, que pode ser fixa ou rodada (foi escolhido um modelo de fenda fixa por recomendação dos autores do programa). Para além disso, é possível considerar a armadura distribuída, o que é extremamente conveniente do ponto de vista computacional. A lei do material *CC3DNonLinCementitious2* é ilustrada na figura 3.13.

3.4 Implementação em *MATLAB*

O elemento finito proposto foi implementado em *MATLAB* (Mathworks, 2010). Em particular, foram desenvolvidas as seguintes rotinas:

- (i) Programa de controle, o qual procede à aplicação de incrementos de carga, com resolução iterativa das equações de equilíbrio em cada incremento pelo método de Newton-Raphson;
- (ii) Determinação da matriz de rigidez tangente e dos vetores das forças internas, externas e desequilibradas;
- (iii) Determinação de tensões em regime fisicamente não-linear;
- (iv) Visualizador de resultados.

De seguida aborda-se cada uma destas rotinas, as quais são apresentadas no Anexo A. Relativamente às rotinas já existentes (Gonçalves e Camotim, 2011, 2012 e Freitas, 2011), estas não serão apresentadas.

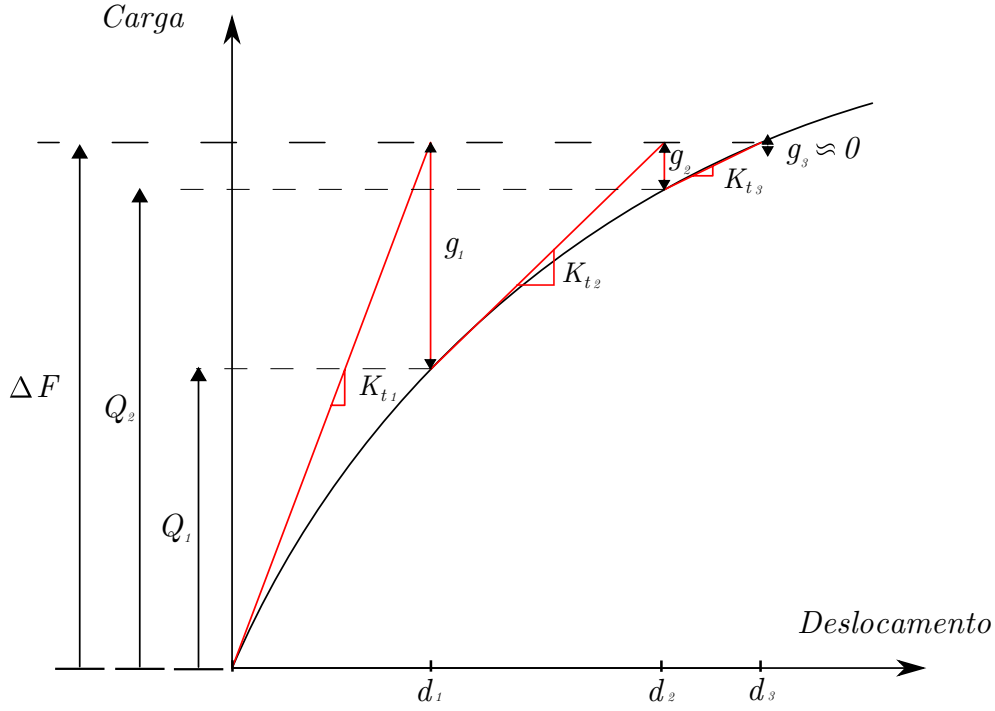


Figura 3.14: Método de Newton-Raphson para sistemas com um grau de liberdade

3.4.1 Programa de controle

O programa de controle permite a determinação das trajetórias de equilíbrio, executando todas as demais rotinas. Estabelecem-se os incrementos de carga e, para cada um deles, executa-se o processo iterativo (Newton-Raphson). Em caso de convergência, as variáveis relevantes (deslocamentos, deformações, deformações plásticas, etc.) são atualizadas.

A estratégia incremental-iterativa é normalmente ilustrada recorrendo a um gráfico do tipo do representado na figura 3.14, relativo a um sistema com um grau de liberdade (a generalização para mais graus de liberdade envolve a utilização de matrizes e vetores). Nesta figura, ΔF é o incremento de carga (neste caso $\Delta F = F$ dado que $F = 0$ no início do incremento), o índice indica o número da iteração, K_t é a rigidez tangente, d é o deslocamento, Q é a força interna e $g = Q - F$ é a força desequilibrada a qual é utilizada na iteração seguinte para obter uma nova estimativa da configuração de equilíbrio.

Para sistemas com vários graus de liberdade, o incremento de deslocamento na iteração $i + 1$ é obtido através de

$$\Delta d_{i+1} = (K_t)_{i+1}^{-1}(-g_i) \quad (3.30)$$

A convergência é atingida quando a norma do vetor das forças desequilibradas atinge um valor reduzido em relação às forças aplicadas, i.e.,

$$\|g\| < 0.001\|F\|, \quad (3.31)$$

onde os vetores g e F são dados pelas equações (2.58) e (2.61), eliminando os graus de liberdade restringidos (condições de fronteira cinemáticas).

3.4.2 Determinação de matrizes/vetores

A matriz de rigidez tangente do elemento finito possui: $4N - N_w$ colunas e $4N - N_w$ linhas (recordar a notação introduzida no Capítulo 2) e os vetores das forças internas/ externas/ desequilibradas têm igualmente $4N - N_w$ linhas. A montagem da matriz e dos vetores globais está ilustrada na figura 3.15, para três elementos finitos, onde se indica as funções de aproximação utilizadas em cada grau de liberdade (de acordo com a sequência estabelecida no Capítulo 2). Note-se que o número de linhas (e colunas, no caso da matriz de rigidez) é igual a $2Nn_e + 2N - N_w$.

A determinação da matriz de rigidez e do vetor das forças internas é efetuada com recurso a integração numérica, utilizando a regra de quadratura de Gauss. A numeração escolhida para os pontos de integração é ilustrada na figura 3.16, para dois elementos finitos e uma secção transversal com duas paredes (neste exemplo, utilizaram-se três pontos de integração segundo y e apenas dois pontos segundo x e z).

Para atingir uma melhor eficiência computacional, a integração deve ter em conta a natureza específica da aproximação do campo de deslocamentos da GBT (i.e., os modos de deformação são apenas função de y e as funções de aproximação são apenas função de x). Assim, antes do início do processo incremental, as matrizes (2.26) são pré-calculadas para cada posição dos pontos de integração (segundo y) e a matriz (2.47) e suas derivadas são pré-calculadas para cada ponto de integração segundo x . Em cada iteração, a integração é efetuada em primeiro lugar segundo z , o que não requer a determinação de novas matrizes (2.26) e (2.47)), e somente depois segundo y e x (o que apenas requer a recuperação das matrizes já pré-calculadas).

A introdução das condições de fronteira cinemáticas é efetuada eliminando os graus de liberdade correspondentes da matriz de rigidez e dos vetores das forças. Nos exemplos apresentados na secção 3.5 foram considerados os seguintes apoios:

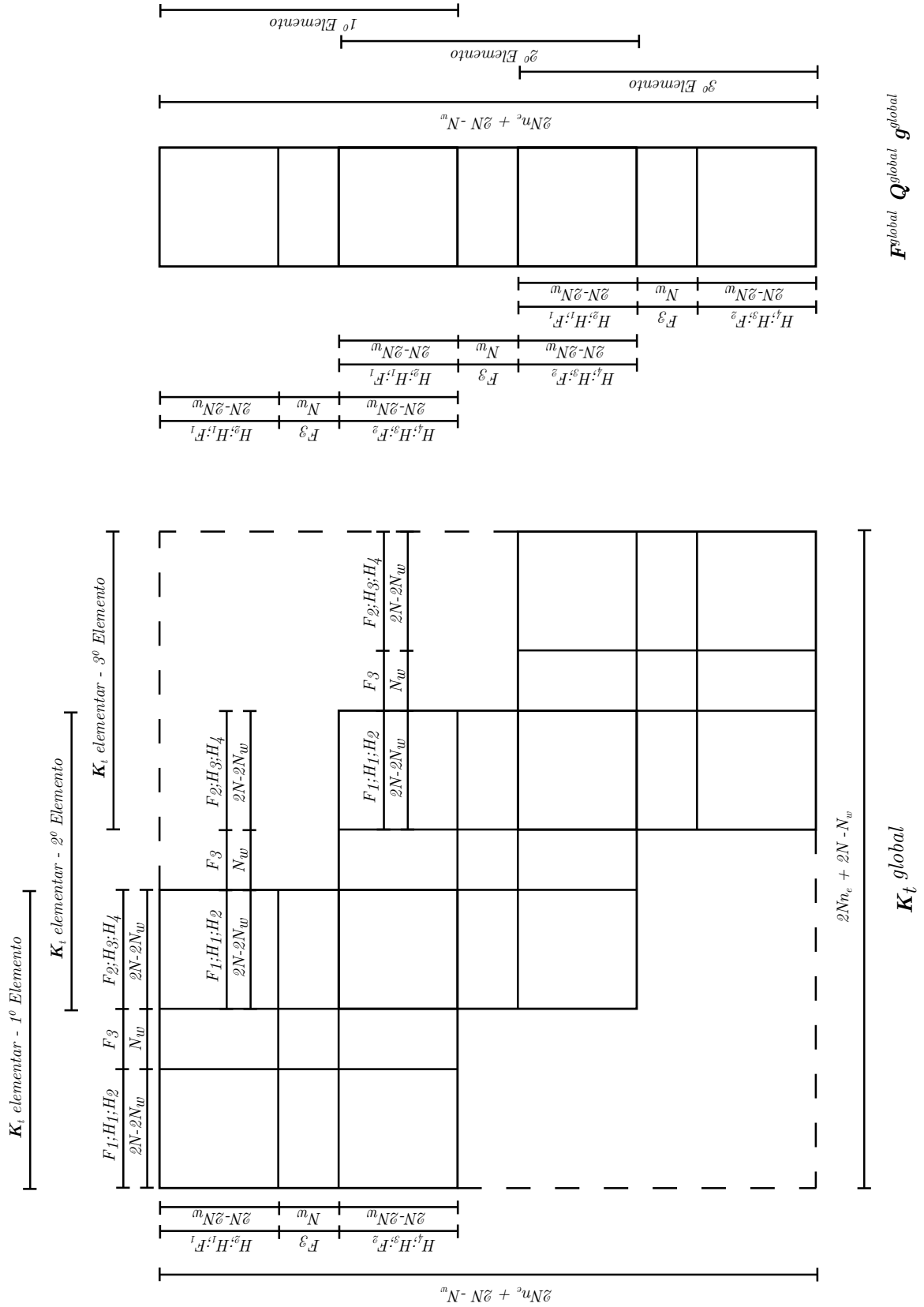
- Apoio simples – neste caso é necessário eliminar os graus de liberdade associados às funções H_1 (no caso de um apoio em $x = 0$) e/ou H_3 (no caso de um apoio em $x = l$) do modo de flexão.
- Encastramento – torna-se necessário eliminar todos dos graus de liberdade associados ao nó, ou seja, F_1, H_1, H_2 ($x = 0$) ou F_2, H_3, H_4 ($x = l$).
- Encastramento deslizante (num plano vertical) - o encastramento deslizante requer a eliminação dos graus de liberdade de rotação induzidos pela flexão (H_2 para $x = 0$, H_4 para $x = l$) e os deslocamentos axiais dos modos de empenamento (F_1 para $x = 0$, F_2 para $x = l$).

3.4.3 Determinação de tensões em regime fisicamente não-linear

Em geral, em problemas fisicamente não-lineares (como é o caso dos problemas abordados neste trabalho), é necessário guardar e atualizar em cada incremento/iteração um certo número de parâmetros que descrevem a história de tensões e deformações (em cada ponto de integração).

Para o betão, são guardadas os seguintes parâmetros:

- tensão longitudinal (σ_{xx}) no início do incremento;
- deformação longitudinal correspondente à abertura de fendas.


 Figura 3.15: Montagem da matriz global \mathbf{K}_t e dos vetores globais $\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \mathbf{g}$

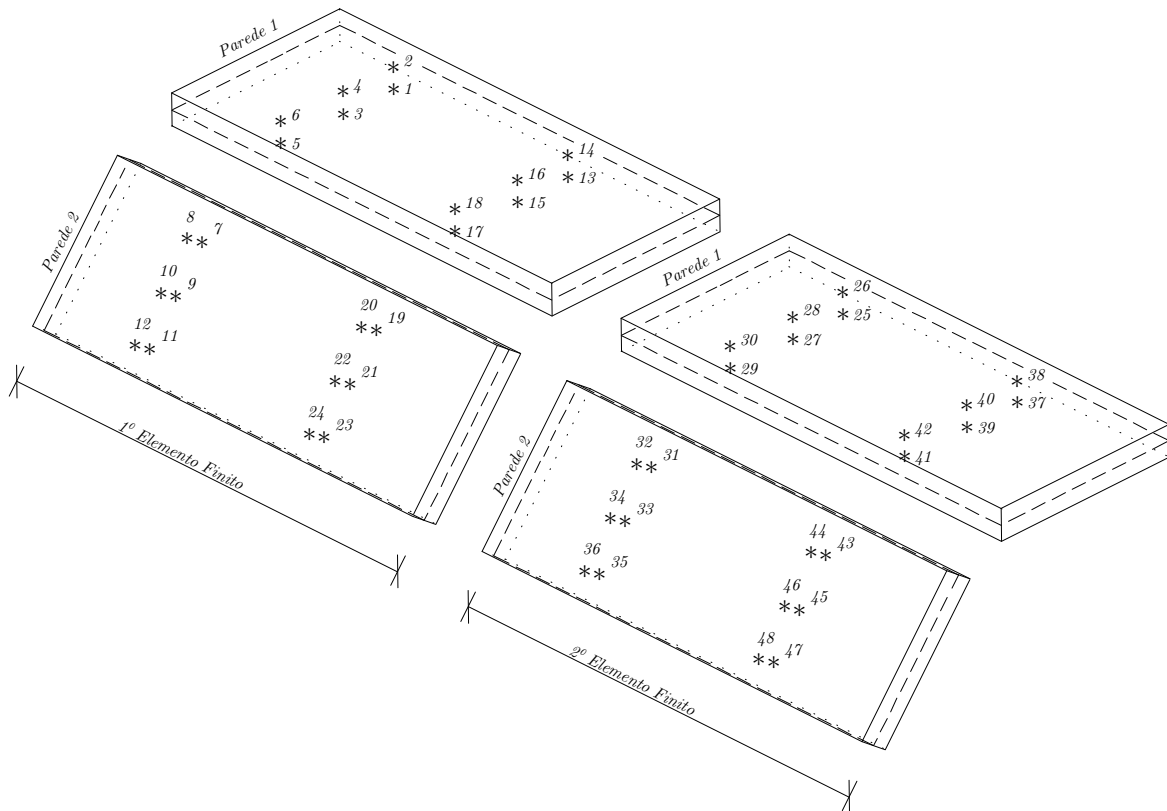


Figura 3.16: Numeração dos pontos de integração para (i) dois elementos finitos (ii) duas paredes (iii) dois pontos de integração segundo x (iv) três pontos de integração segundo y e (v) dois pontos de integração segundo z

No final de cada iteração, a tensão longitudinal é determinada com base nestes parâmetros e na deformação total, recorrendo à relação constitutiva apresentada na secção 3.3. No entanto, os parâmetros só são atualizados caso haja convergência da solução.

No caso da armadura e dos banzos do perfil de aço o processo é semelhante, muito embora a deformação correspondente à abertura de fendas não exista, naturalmente. No caso da alma do perfil, a qual está sujeita a um estado de tensão com $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} \neq 0$, o procedimento é significativamente mais complexo, não tendo sido objeto de estudo neste trabalho. Para o efeito foram traduzidas para a linguagem do *MATLAB* rotinas desenvolvidas em trabalhos anteriores (Gonçalves e Camotim, 2011; 2012) — as tensões são determinadas em cada iteração recorrendo ao chamado “algoritmo de retorno de Euler à retaguarda” e \mathbf{C}_t , utilizado para calcular a matriz de rigidez tangente, corresponde ao operador constitutivo tangente consistente.

3.4.4 Visualizador de resultados

A representação de resultados compreende duas fases:

- Representação da configuração indeformada da estrutura,

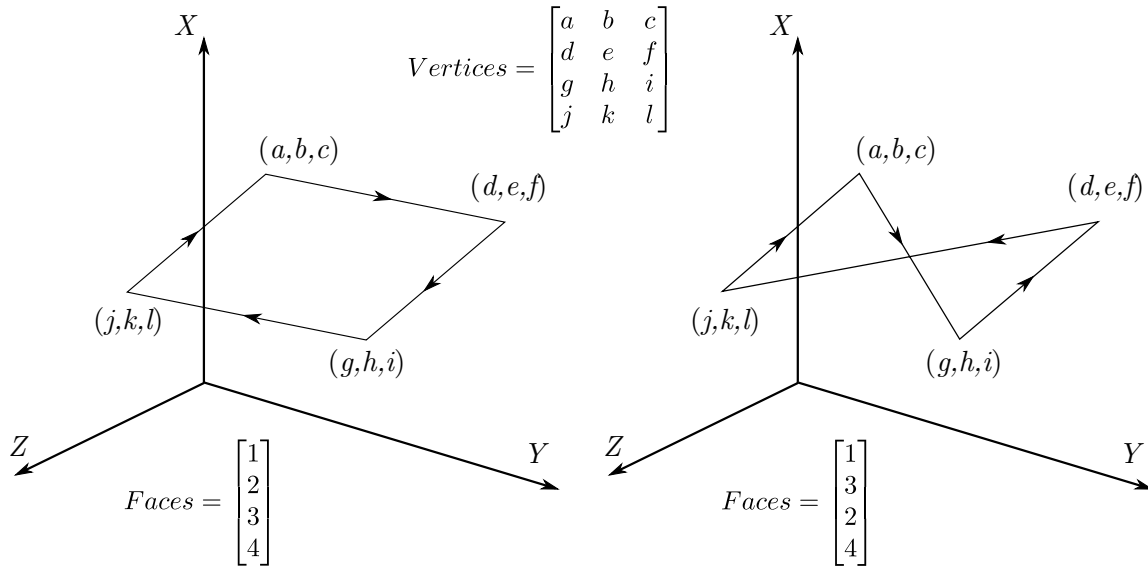


Figura 3.17: Aplicação correta (à esquerda) e incorreta (à direita) da matriz “Faces”

- Representação da configuração deformada da estrutura e de outros resultados (tensões em regime elástico, deslocamentos, etc.).

O visualizador de resultados foi desenvolvido com recurso à função *patch* do *MATLAB*, a qual permite desenhar polígonos tridimensionais com cor, utilizando as “propriedades” *Vertices* e *Faces* — na figura 3.17 ilustra-se a sintaxe correta/incorreta de *Faces*, tendo como entrada uma matriz *Vertices*.

As propriedades secundárias da função *patch* permitem atribuir cores:

- EdgeColor* define a cor da linha que delimita o polígono;
- FaceColor* define a cor a usar na face do polígono;
- FaceVertexCData* associa a cada vértice do polígono um escalar (variável a representar); os valores da aresta do polígono são interpolados através dos valores de cada vértice utilizando o comando *interp*.

Finalmente, utiliza-se o comando *colorbar* para representar uma barra de cores, indicando os valores associados. A figura 3.18 mostra um exemplo da utilização do *colorbar*. Resta referir que a representação simultânea das configurações indeformada e deformada é conseguida através do comando *hold*.

Para permitir a representação rápida das funções de amplitude de cada modo, foi desenvolvida uma rotina em *MATLAB* que exporta os resultados para o *Excel*. No entanto, para permitir uma melhor compreensão dos efeitos relativos dos vários modos de *shear lag*, a rotina procede à alteração da escala dos modos quadráticos, dado que as funções utilizadas não exibem amplitude unitária (ao contrário dos modos de *shear lag* lineares — recordar secção 3.2). Assim, os modos quadráticos são multiplicados pelo inverso da sua amplitude máxima, $b^2/4$.

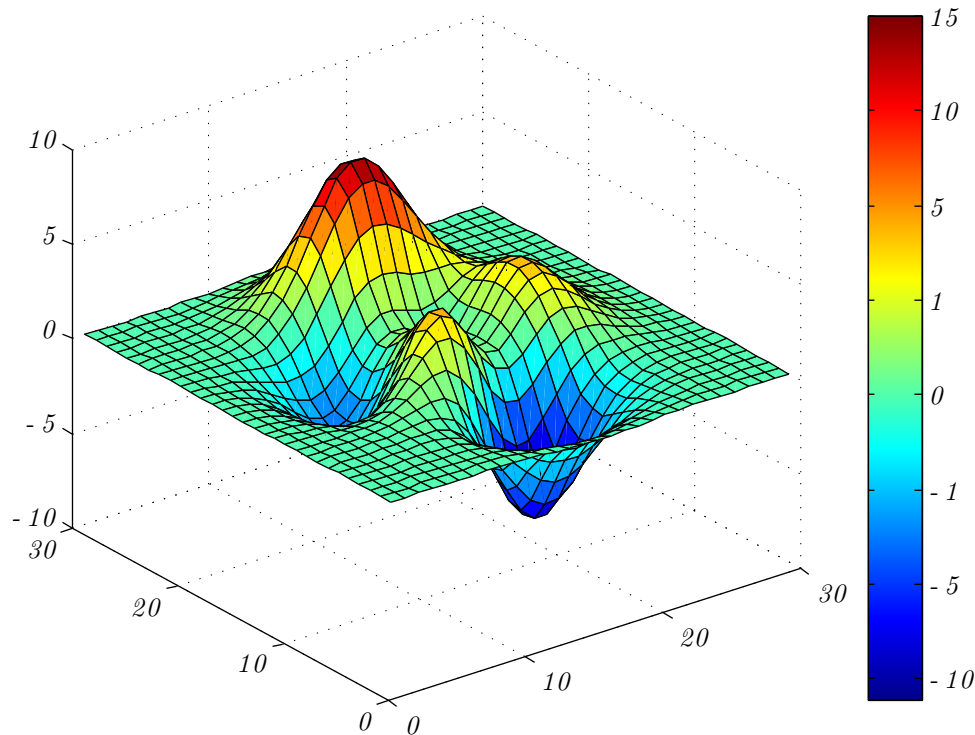


Figura 3.18: Exemplo de utilização do comando *colorbar*

3.5 Aplicações

3.5.1 Exemplo 1 – *shear lag* elástico em vigas simplesmente apoiadas

Com este primeiro exemplo pretende-se demonstrar a eficiência do elemento proposto na determinação de tensões normais longitudinais (σ_{xx}), em regime elástico e devidas ao efeito de *shear lag*. São analisadas duas vigas simplesmente apoiadas, com seis e oito metros de vão, solicitadas por duas cargas verticais uniformemente distribuídas de 1 kN/m , aplicadas no plano da alma dos perfis — a figura 3.19(a) mostra a posição das cargas, a geometria da secção e as propriedades (elásticas) dos materiais. Devido à dupla simetria do problema (transversal e longitudinal), foi modelado apenas um quarto da viga (metade da secção transversal e metade do comprimento da viga), utilizando as condições de apoio apropriadas.

Para efeitos de validação, os resultados obtidos com o elemento finito proposto são comparados com os obtidos com um modelo de elementos finitos de casca de quatro nós (*ADINA*), o qual é representado na figura 3.19(d) e envolve cerca de 3400 graus de liberdade. Neste modelo, a ligação entre a laje de betão e o perfil é conseguida através da utilização de elementos rígidos (*rigid links*) entre os nós da laje de betão e do banzo superior do perfil metálico.

No caso do elemento finito proposto, são utilizados todos os modos de deformação apresentados na secção 3.2 os quais se representam na 3.19(c) para a secção em causa (a geometria referida à linha média das paredes é indicada na figura 3.19(b)): modo axial, modo de flexão, modo de empenamento de flexão e modos de *shear lag*. Note-se que os banzos de betão da secção simplificada não são simétricos, razão pela qual houve que considerar modos de *shear lag* independentes para cada um deles. São considerados apenas 8 elementos finitos, o que corresponde a apenas 112 graus de liberdade.

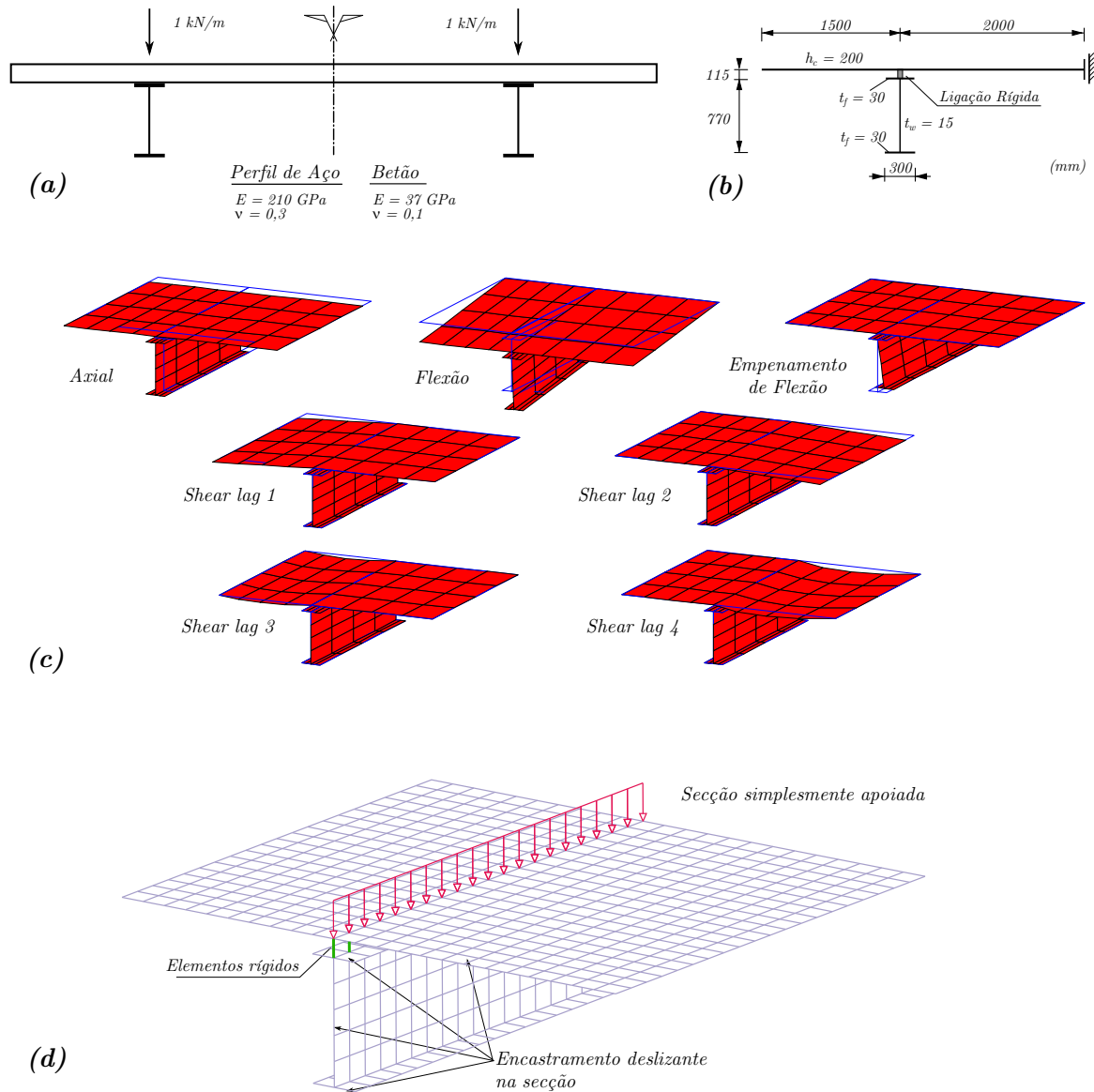


Figura 3.19: Exemplo 1: (a) geometria da secção transversal, carga e parâmetros materiais, (b) secção discretizada, (c) modos de deformação e (d) modelo de elementos finitos de casca (ADINA).

Tabela 3.1: Deslocamento vertical para o vão de 6 metros

	GBT	ADINA	Diferença relativa
Deslocamento	$1,32 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^{-5}$	0,47 %

Tabela 3.2: Deslocamento vertical para o vão de 8 metros

	GBT	ADINA	Diferença relativa
Deslocamento	$3,52 \times 10^{-5}$	$3,54 \times 10^{-5}$	0,62 %

As tabelas 3.1 e 3.2 permitem comparar os deslocamentos a meio-vão obtidos com o elemento finito proposto e os modelos de elementos de casca. Conforme se pode constatar, em ambos os casos a diferença é extremamente pequena.

A figura 3.20(a) mostra as configurações deformadas obtidas com o elemento finito proposto e as distribuições de σ_{xx} (tensão normal longitudinal) na laje de betão. Observa-se que o efeito de *shear lag* é mais pronunciado para o menor vão, o que se deve ao facto de a deformabilidade por corte se tornar mais relevante à medida que o vão diminui. Note-se que o efeito dos banzos desiguais é claramente visível na figura (distribuição de tensões não simétrica), sendo o efeito de *shear lag* mais pronunciado no banzo mais largo (mais deformável).

Os gráficos da figura 3.21(a) mostram as distribuições de σ_{xx} , na laje de betão, na secção de meio-vão, obtidas com a GBT e o modelo de elementos de casca. É de salientar-se que se obtém uma excelente concordância entre os dois modelos, apesar de o modelo proposto envolver um número de graus de liberdade muito inferior. Ainda assim, regista-se uma ligeira diferença para $y = 0$, particularmente para $L = 6\text{ m}$. Foi investigado se estas diferenças diminuem com a introdução de mais modos de *shear lag* (sinusoidais, com 2 ou mais semi-ondas em cada banzo), tendo-se concluído que os resultados não se alteram significativamente. Estes gráficos permitem mais uma vez observar que o efeito de *shear lag* é mais pronunciado para o menor vão e que a distribuição de tensões não é simétrica.

Finalmente, os gráficos da figura 3.21(b) mostram as funções de amplitude modais da GBT para $0 \leq x \leq L/2$ (apoio – meio-vão), e permitem avaliar a importância relativa dos diferentes modos. Em particular, estes resultados permitem extrair as seguintes conclusões:

- (i) O modo de flexão é naturalmente preponderante, exibindo um máximo a meio-vão e um mínimo no apoio (amplitude nula).
- (ii) O modo de empenamento de flexão traduz o efeito da deformação por esforço transversal na alma e corresponde à segunda maior participação. Note-se que, naturalmente, tendo em conta o diagrama de esforço transversal, a influência deste modo é maior para o menor vão, é máxima nos apoios e é nula a meio-vão.
- (iii) Os modos de *shear lag* exibem um andamento semelhante ao do modo de empenamento de flexão, o que se deve ao facto de traduzirem também um efeito de deformação por corte. De entre os modos de *shear lag*, os correspondentes a funções lineares (SL1 e SL2) são os que mais influência têm. Note-se que a participação dos modos SL2 e SL4 relativos ao banzo de betão da direita, é superior à dos modos SL1 e SL3, o que está em acordo com a observação feita anteriormente relativamente ao efeito dos banzos desiguais.
- (iv) O modo axial tem participação não-nula e semelhante à dos modos de *shear lag*, em virtude de a posição da linha neutra em flexão se alterar devido ao efeito de *shear lag*.

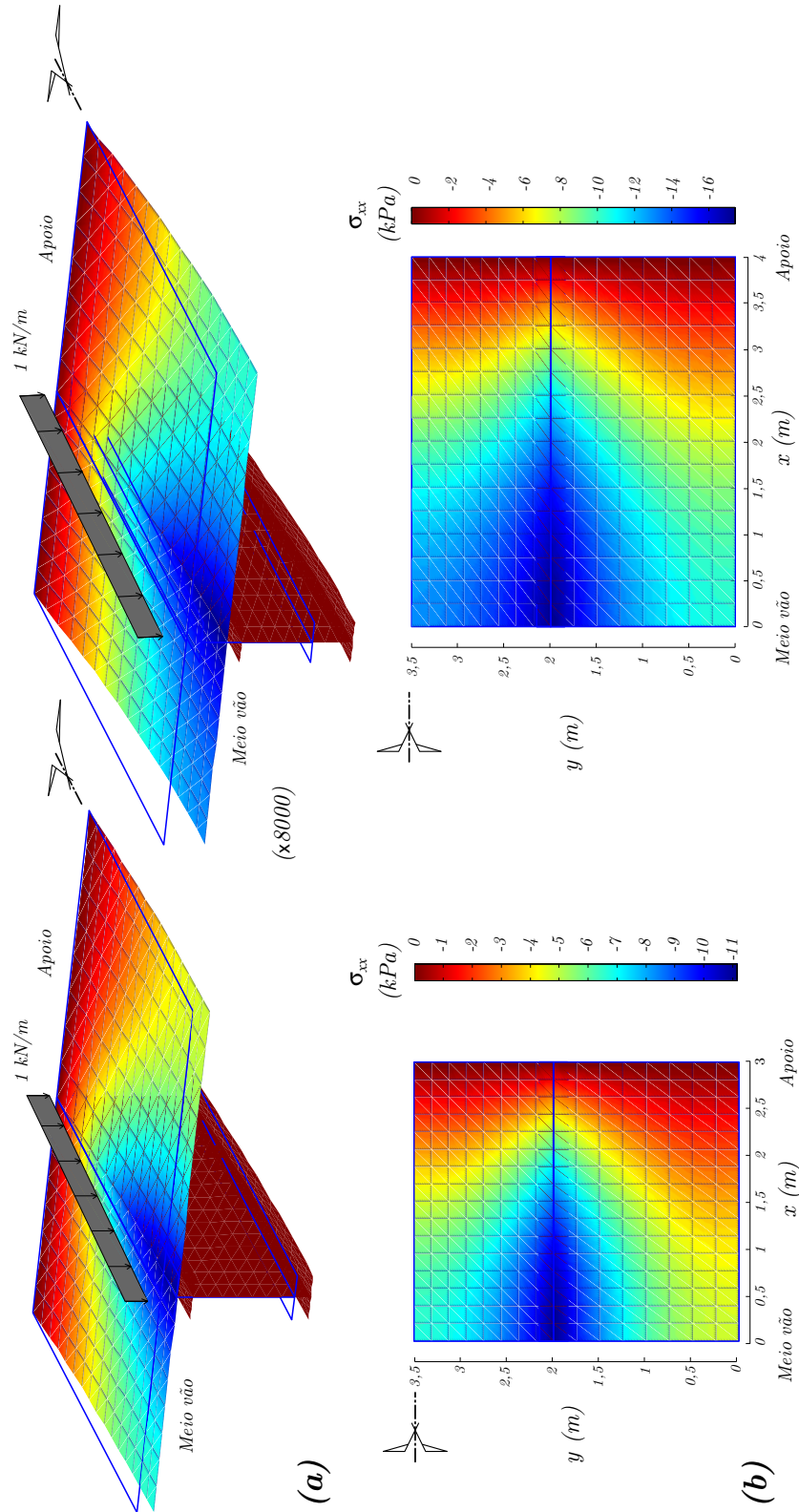


Figura 3.20: Exemplo 1: configurações deformadas e distribuição das tensões normais longitudinais na laje de betão.

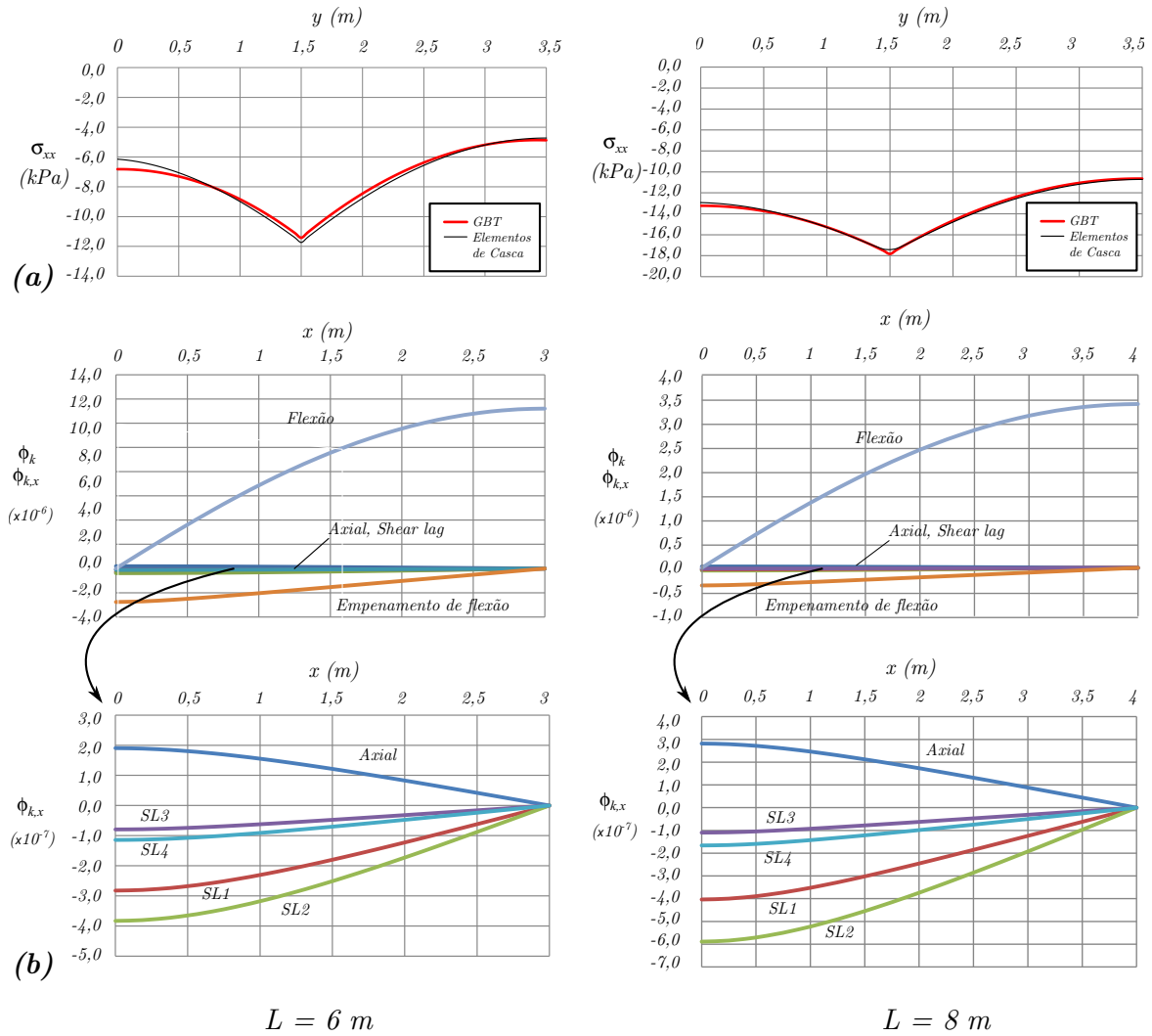


Figura 3.21: Exemplo 1: (a) tensões normais longitudinais na laje de betão, a meio-vão, e (b) funções de amplitude modais da GBT para $0 \leq x \leq L/2$.

3.5.2 Exemplo 2 – fendilhação

Neste exemplo estuda-se a precisão do elemento finito proposto na determinação do comprimento da zona fendilhada de uma viga encastrada-apoiada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 1 kN/m e não suscetível aos efeitos de *shear lag*. Admite-se que os materiais exibem um comportamento elástico linear, muito embora o betão não possua resistência à tração. A figura 3.22 mostra a geometria do problema e as propriedades dos materiais, bem como os modos de deformação utilizados (recorde-se que não se está a considerar o efeito de *shear lag*).

Para efeitos de comparação, procede-se à determinação do comprimento de fendilhação pela resolução analítica do problema (hiperestático) pelo Método das Forças. Designe-se por L_1 o comprimento da zona não fendilhada, por $(EI)_1$ a rigidez de flexão da secção não fendilhada e por L_2 e $(EI)_2$ os respetivos valores para a zona fendilhada. Naturalmente, a transição entre zonas corresponde à alteração do sinal do momento fletor. Sem fendilhação, a

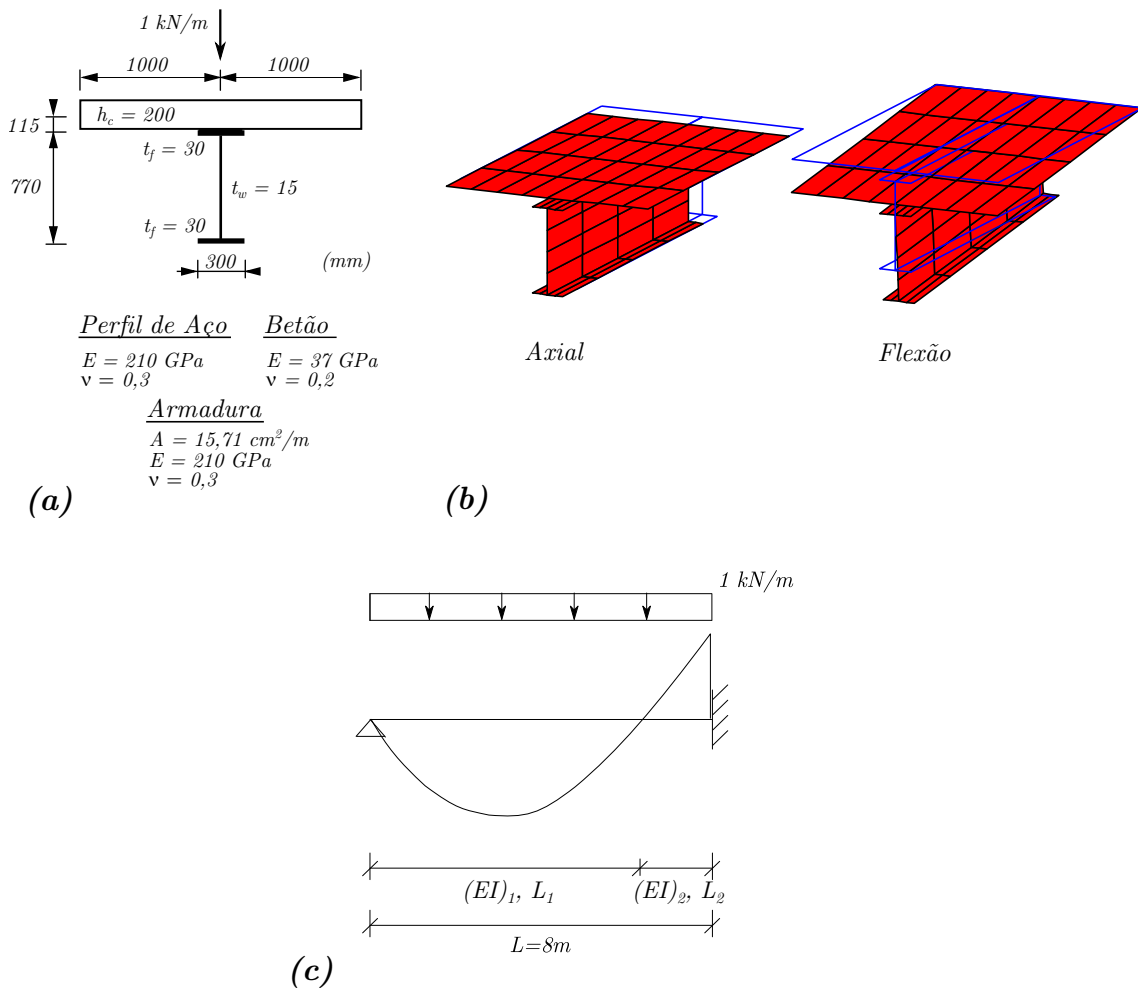


Figura 3.22: Exemplo 2: (a) geometria da secção transversal, carga aplicada e propriedades dos materiais, (b) modos de deformação utilizados e (c) condições de apoio, notação, vão, carga aplicada e diagrama de momento fletor.

Tabela 3.3: Rigidez de flexão da secção fendilhada e não-fendilhada

$EI_{\text{não fendilhado}}$	$1,9078 \times 10^6$
$EI_{\text{fendilhado}}$	$8,878 \times 10^5$

transição encontra-se a uma distância igual a $5/8$ do vão, contada a partir do encastramento. A ocorrência de fendilhação conduz a uma perda de rigidez na zona de momentos negativos e, consequentemente, a que a transição ocorra mais perto do encastramento.

A rigidez de flexão da secção fendilhada não considera a contribuição do betão e a rigidez não-fendilhada é obtida considerando a totalidade da secção. Sendo a determinação destes valores algo trivial, não será apresentada, mas os resultados são fornecidos na tabela 3.3.

Aplicando o Método das Forças à resolução do problema, com o sistema base dado na figura 3.23, onde a reação vertical no apoio da esquerda corresponde à incógnita hiperestática, tendo

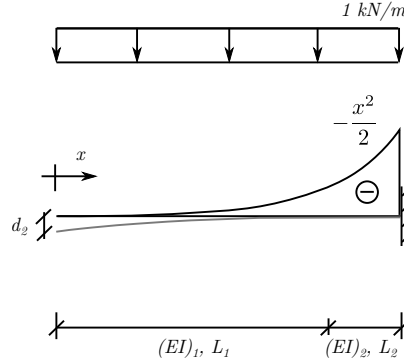


Figura 3.23: Exemplo 2: sistema Base com as forças exteriores e respetivo diagrama de momento fletor.

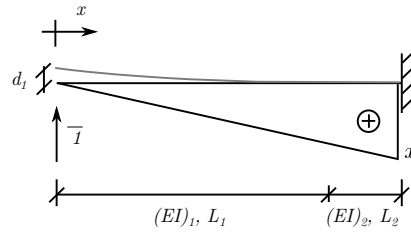


Figura 3.24: Exemplo 2: sistema Base com carga unitária e respetivo diagrama de momento fletor.

em conta as figuras 3.23 e 3.24, tem-se

$$0 = d_1 X + d_2, \quad (3.32)$$

$$d_1 = \frac{1}{(EI)_1} \int_0^{L_1} x^2 dx + \frac{1}{(EI)_2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} x^2 dx, \quad (3.33)$$

$$d_2 = \frac{1}{(EI)_1} \int_0^{L_1} \frac{-x^2}{2} x dx + \frac{1}{(EI)_2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{-x^2}{2} x dx. \quad (3.34)$$

A solução é

$$X = \frac{3(EI_1(L_1^4 - (L_1 + L_2)^4) - EI_2 L_1^4)}{8(EI_1(L_1^3 - (L_1 + L_2)^3) - EI_2 L_1^3)}, \quad (3.35)$$

$$M = M_1 X + M_2 = -\frac{x^2}{2} + Xx \quad (3.36)$$

e o comprimento de fendilhação L_1 é obtido a partir da condição

$$M(x = L_1) = 0, \quad (3.37)$$

o que conduz a $L_1 = 6,452 \text{ m}$ e $L_2 = 1,548 \text{ m}$.

Por uma questão de consistência com o método analítico utilizado, as análises com o elemento finito proposto consideram apenas os modos de deformação de flexão e axial (ver figura 3.22) — recorde-se que o modo axial é necessário para corrigir a posição da linha neutra, dado que o modo de flexão é calculado admitindo que a secção não se encontra fendilhada.

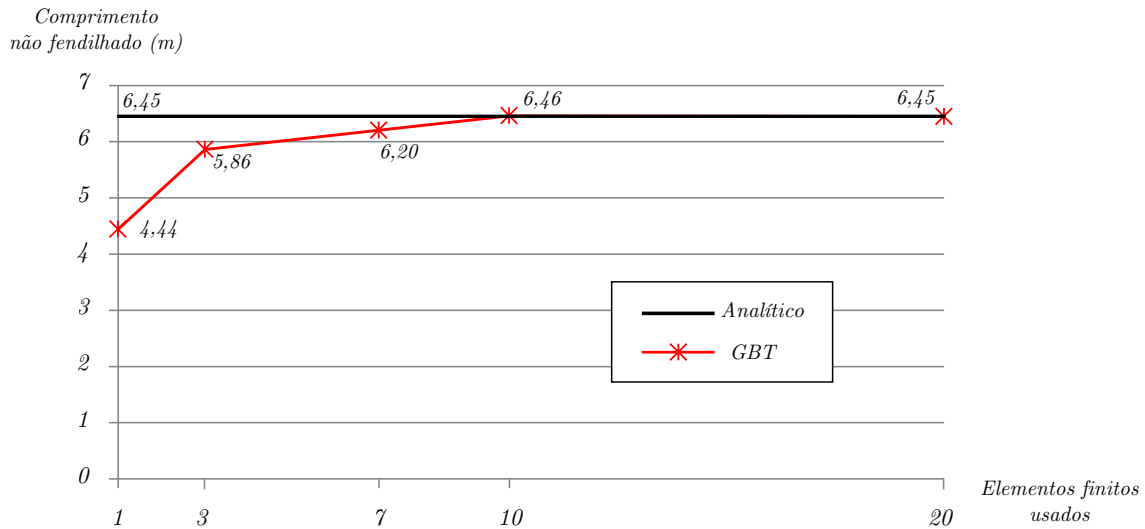


Figura 3.25: Exemplo 2: comprimento da zona não fendilhada em função do número de elementos finitos.

Os resultados obtidos são apresentados na figura 3.25. No caso da GBT, foram efetuadas análises com um, três, sete, dez e vinte elementos finitos. Como se pode observar, os resultados convergem para a solução analítica, sendo os resultados muito precisos a partir dos dez elementos finitos. No entanto, é também de salientar que os resultados com menos do que três elementos são pouco satisfatórios.

3.5.3 Exemplo 3 – fendilhação generalizada e comparação com elementos finitos convencionais

Este exemplo pretende mostrar que o elemento finito proposto permite obter bons resultados quando ocorre fendilhação generalizada e que o mesmo não acontece num modelo de elementos finitos convencionais, por dificuldade de convergência. Para tal, considerou-se a viga ilustrada na figura 3.26(a), simplesmente apoiada e sujeita a uma carga uniformemente distribuída ascendente, causando momento negativo em toda a viga e, conseqüentemente, fendilhação em toda a sua extensão.

Para efeitos de comparação, recorreu-se a um modelo de elementos finitos convencionais, utilizando o programa *ADINA* (ver figura 3.26(c)). Este programa não permite a utilização de elementos de casca com o material *CONCRETE* e a consideração de armadura distribuída pelo que foi necessário utilizar elementos 3D *Solid* (elemento de volume de oito nós) para o betão e elementos *truss* (de treliça) para cada varão de armadura. Tal como no exemplo 3.5.1, o perfil é modelado com elementos finitos de casca. Para além disso, de modo a permitir uma adequada transferência do fluxo de corte na ligação laje-perfil, houve que incluir elementos de casca no banzo superior do perfil (tipo “conectores”), de aço com 3 cm de espessura, como mostra a figura 3.26(c). Finalmente, para mitigar problemas relacionados com a falta de convergência da solução, foi necessário incluir no modelo armadura transversal (para além da longitudinal) em ambas as faces da laje. Naturalmente, trata-se de um modelo bastante complexo o qual não permite atingir patamares de carga moderados a elevados, devido ao efeito da fendilhação generalizada. Por exemplo, foi necessário considerar uma resistência à tração de 10 kPa de modo a que fosse possível obter uma trajetória de equilíbrio minimamente

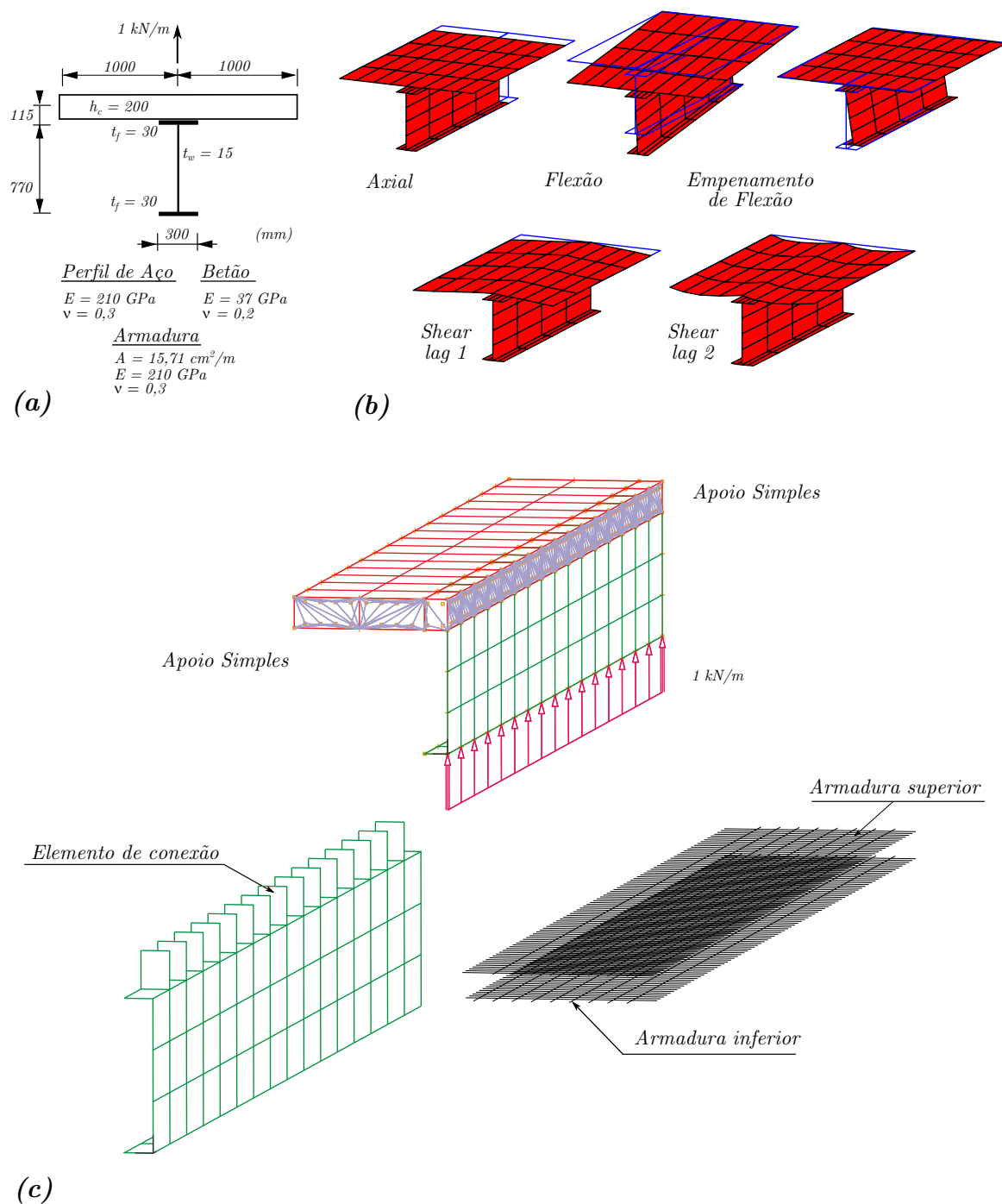


Figura 3.26: Exemplo 3: (a) geometria da secção transversal, carga, propriedades do material e secção reduzida à linha média, (b) modos de deformação e (c) modelo de elementos finitos casca/solid/truss.

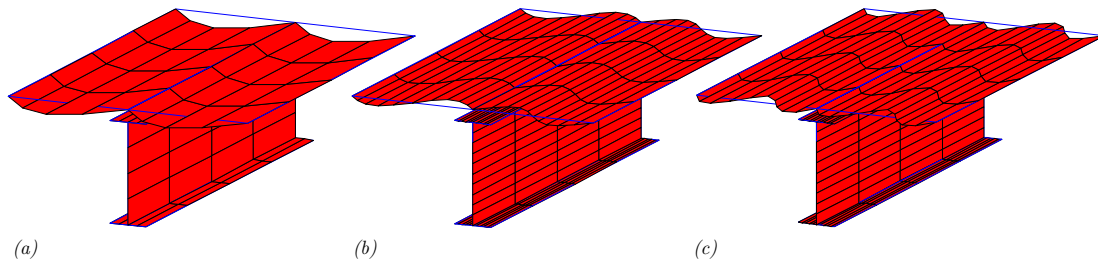


Figura 3.27: Exemplo 3: modos sinusoidais com (a) uma semi-onda (b) duas semi-ondas e (c) três semi-ondas em cada banzo.

satisfatória.

No caso da GBT, considera-se que a resistência do betão à tração é nula e foi apenas considerada uma camada de armadura (concentrando a totalidade da área de aço). Os modos incluídos na análise são apresentados na figura 3.26(b), totalizando apenas 5 modos: axial, flexão, empenamento de flexão e modos de *shear lag* simétricos lineares e quadráticos. Foram ainda considerados modos de *shear lag* sinusoidais, com várias semi-ondas, mas os resultados não sofreram uma alteração relevante, pelo que não são apresentados. Estes modos sinusoidais são apresentados na figura 3.27.

Os resultados obtidos são ilustrados na figura 3.28. O gráfico (a) mostra a distribuição de tensões normais longitudinais (σ_{xx}) na armadura, para secção de meio-vão (sem simplificações de simetria) e para o nível máximo de carga obtido no *ADINA* ($0,653 \text{ kN/m}$). No caso do modelo de elementos finitos convencionais (*ADINA*), a tensão representada corresponde à média da obtida para a armadura superior e inferior. O gráfico (b) da mesma figura mostra a evolução do deslocamento vertical do meio-vão, em função da carga aplicada. Estes resultados permitem extrair as seguintes conclusões:

- (i) Relativamente à distribuição de tensões (gráfico (a)), observa-se que os resultados obtidos com os dois modelos são bastante próximos. No entanto, o modelo de elementos finitos convencionais conduz a um andamento sensivelmente mais “irregular” do que o obtido com o elemento finito proposto — aliás, a solução fornecida com o elemento proposto praticamente não evidencia efeitos de *shear lag*.
- (ii) O gráfico carga-deslocamento mostra claramente que o modelo de elementos convencionais exibe uma rigidez inicial um pouco maior do que o modelo com o elemento finito da GBT. Naturalmente, tal deve-se ao facto de ter sido utilizada uma resistência à tração do betão no primeiro caso. No entanto, note-se que nos dois últimos pontos da curva os resultados convergem com os da GBT, em virtude da fendilhação generalizada. Deve salientar-se que o modelo da GBT exibe rigidez constante a partir do momento em que ocorre fendilhação, dado que se admite que os materiais exibem um comportamento elástico (embora o betão não possua resistência à tração).

3.5.4 Exemplo 4 – *shear lag* com fendilhação numa viga encastrada-apoiada

Este exemplo inclui a fendilhação do betão, muito embora o comportamento deste material à compressão seja considerado elástico linear. Estuda-se o comportamento de uma viga apoiada-encastrada, com um vão de 8 metros, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 1

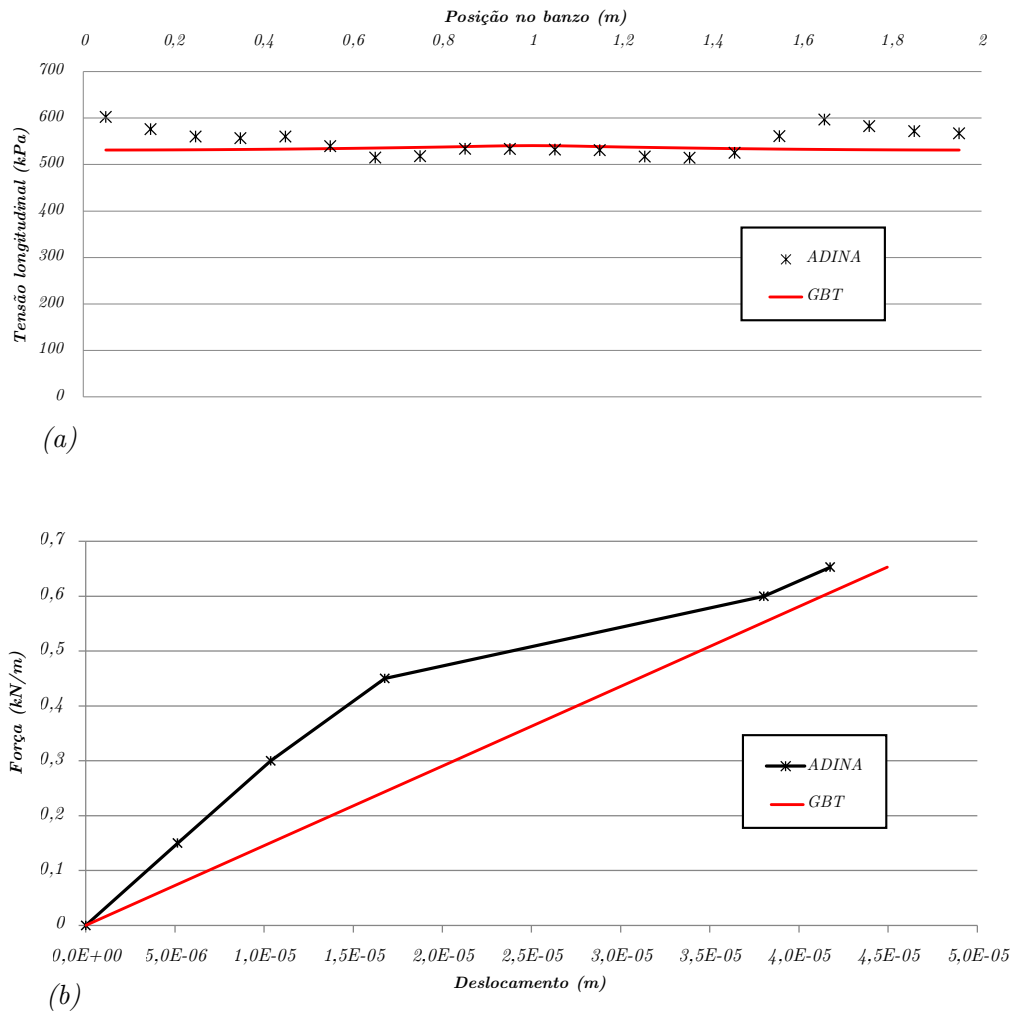


Figura 3.28: Exemplo 3: (a) distribuição de tensões normais longitudinais na armadura, na secção de meio-vão (sem simplificações de simetria), e (b) gráfico carga-deslocamento

kN/m (descendente), aplicada no plano da alma do perfil. Para além disso, investiga-se a influência do factor de redução da rigidez de corte (β). A geometria da secção e as propriedades dos materiais são indicados na figura 3.29(a).

No caso da GBT, foram utilizados novamente todos os modos de deformação, ou seja (ver figura 3.29)(b): axial, flexão, empenamento de flexão e modos de *shear lag* simétricos lineares e quadráticos. Foram analisados dois modelos, um com 8 elementos (111 graus de liberdade) e outro com 64 elementos (895 graus de liberdade). Para além disso, foram considerados dois valores para o factor de redução da rigidez, $\beta = 1$ e $\beta = 1/3$.

Para efeitos de comparação de resultados, foi utilizado o modelo de elementos finitos convencionais (ADINA) que se mostra na figura 3.29(c), bastante semelhante ao utilizado no exemplo anterior. É de salientar que neste modelo foi necessário aumentar a espessura das chapas da conexão aço-betão até 3 cm, para mitigar os problemas de falta de convergência. No ADINA foi utilizado o valor pré-definido do fator de redução de corte, 0,5.

A tabela 3.4 indica o valor do deslocamento vertical a meio-vão obtido com os vários modelos, e permite extrair as seguintes conclusões:

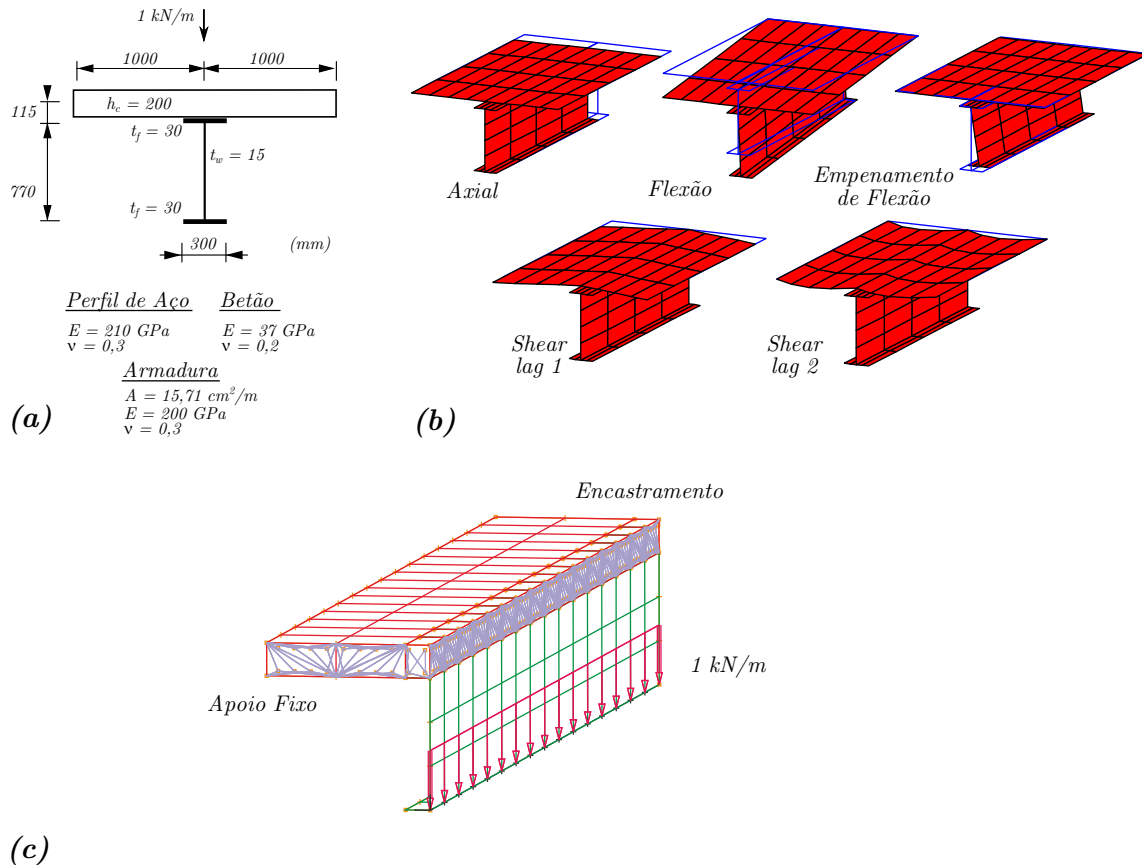


Figura 3.29: Exemplo 4: (a) geometria da secção transversal, carga, propriedades do material e secção reduzida à linha média, (b) modos de deformação e (c) modelo de elementos finitos casca/solid/truss.

Tabela 3.4: Exemplo 4: deslocamento vertical do meio-vão

GBT, 8 EF		GBT, 64 EF		ADINA
$\beta = 1,0$	$\beta = 1/3$	$\beta = 1,0$	$\beta = 1/3$	" β " = 0.5
$2,296 \times 10^{-5}$	$2,304 \times 10^{-5}$	$2,331 \times 10^{-5}$	$2,332 \times 10^{-5}$	$2,183 \times 10^{-5}$

- Os deslocamentos obtidos com o elemento finito proposto não são praticamente afetados pela variação do fator de redução de rigidez de corte — regista-se uma variação nos valores inferior a 0,4%. Por outro lado, não se justifica utilizar mais do que 8 elementos finitos, dado que a consideração de 64 elementos conduz a deslocamentos apenas cerca de 1,5% superiores.
- O modelo de elementos finitos convencionais (ADINA) é sensivelmente mais rígido, fornecendo um deslocamento inferior ao obtido com o elemento proposto em cerca de 5,5 a 7,0%, para 8 e 64 elementos, respetivamente.

Os resultados obtidos pela GBT são detalhados nas figuras 3.30 e 3.31:

- A figura 3.30 (a–b) mostra a configuração deformada da viga e a distribuição das tensões normais longitudinais (σ_{xx}) na laje de betão, para o modelo com 8 elementos finitos e $\beta =$

1. Observa-se que, devido à fendilhação do betão, a zona adjacente ao encastramento exibe tensões nulas. Note-se ainda que, muito embora a largura da laje de betão seja bastante reduzida, regista-se o efeito de *shear lag*.
- (ii) O gráfico 3.31 (c) ilustra a distribuição de tensões na laje, na secção de meio-vão. Representam-se os resultados obtidos com a GBT (ambas as discretizações e ambos os valores de β , sendo que as curvas são virtualmente invariantes com β) e o modelo de elementos finitos convencionais. Muito embora a distribuição seja qualitativamente semelhante, sendo possível observar claramente os efeitos de *shear lag*, regista-se uma diferença ligeira entre os valores obtidos com os diferentes modelos, com o modelo de elementos finitos convencionais a fornecer as tensões mais elevadas.
- (iii) Os gráficos 3.31 (d–g) permitem observar o andamento das funções de amplitude modal para ambas as discretizações analisadas. Tal como no exemplo 3.5.1, observa-se que o modo de flexão tem uma participação preponderante, muito embora a deformação por corte da alma (modo de empenamento de flexão) também tenha um papel significativo, particularmente junto aos apoios, onde ultrapassa a participação do modo de flexão. Quanto aos modos de *shear lag*, conclui-se que os modos lineares são os que mais influência têm. Muito embora os resultados com 64 elementos finitos não sejam significativamente diferentes dos obtidos com 8 elementos, apenas no primeiro caso se obtêm andamentos mais regulares do modo de empenamento, na zona do encastramento. Finalmente, é de salientar que, como seria de esperar, a redução do fator β produz um ligeiro aumento da participação dos modos de *shear lag* (ver gráficos da direita) na zona do encastramento, nomeadamente do modo linear.

3.5.5 Exemplo 5 – material elastoplástico

Este exemplo tem como objetivo avaliar a precisão do elemento finito proposto quando se considera o comportamento não-linear dos materiais, sem influência de *shear lag*. Para tal, analisam-se duas vigas mistas ensaiadas por Ansourian (1982), nomeadamente as vigas CTB1 e CTB4. Os resultados experimentais de Ansourian (1982) são comparados com os obtidos (i) com uma modelação com o elemento finito proposto, (ii) com modelos de elementos finitos convencionais (*ADINA*) e (iii) por Pi et al. (2006), utilizando elementos finitos de barra.

Para os modelos com o elemento proposto, foram adotadas as leis constitutivas não-lineares para o aço e betão descritas na secção 3.3 — é de referir que a expressão (3.20) corresponde precisamente à utilizada por Pi et al. (2006). Devido à inexistência de deformação por corte, apenas se incluíram nas análises os modos de deformação axial e flexão.

Pelo facto de não ocorrerem efeitos de *shear lag*, utilizou-se um modelo plano de elementos finitos convencionais (*ADINA*), utilizando elementos em estado plano de tensão cuja espessura corresponde à dimensão de cada parede na direção perpendicular ao plano (e.g., os elementos correspondentes à laje de betão possuem uma espessura igual à largura da laje; os elementos da alma do perfil possuem uma espessura igual à espessura da alma). Esta simplificação permite uma economia significativa em termos do número de graus de liberdade. Em ambas as vigas recorreu-se a incremento de deslocamento (em vez de força), o que permite em geral minimizar os problemas de convergência.

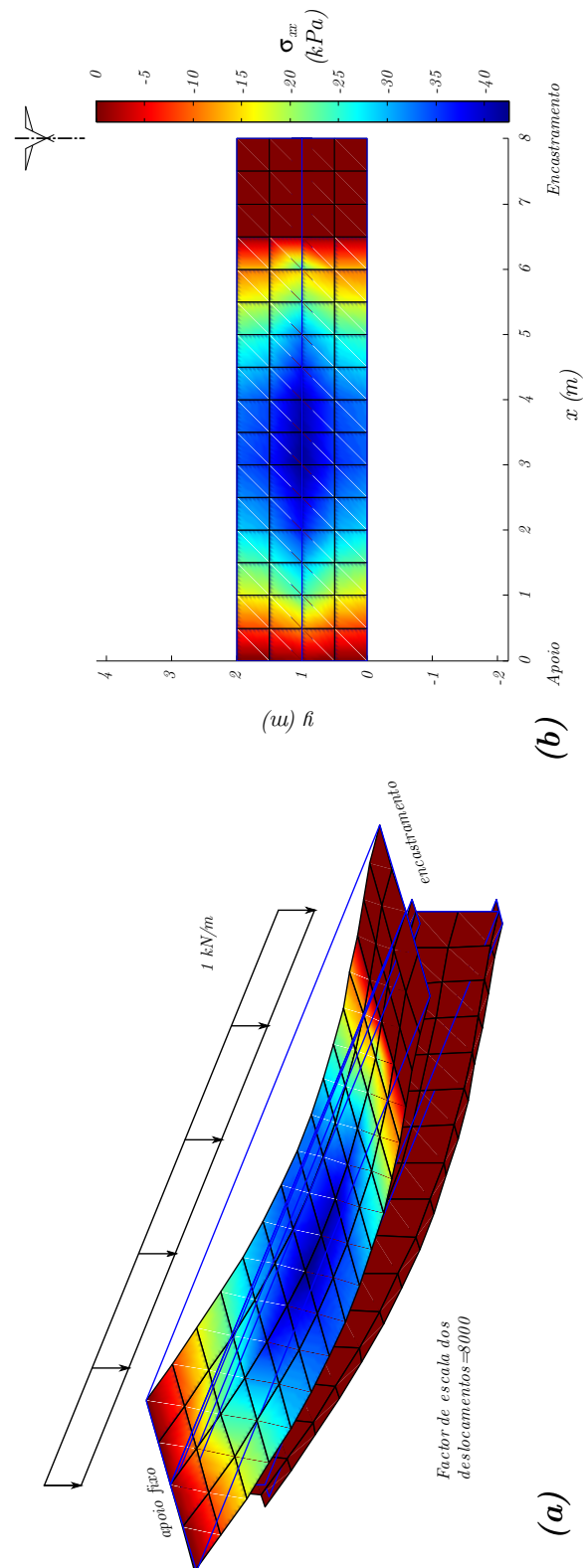


Figura 3.30: Exemplo 4: (a–b) configuração deformada e distribuição das tensões normais longitudinais na laje de betão, na superfície média.

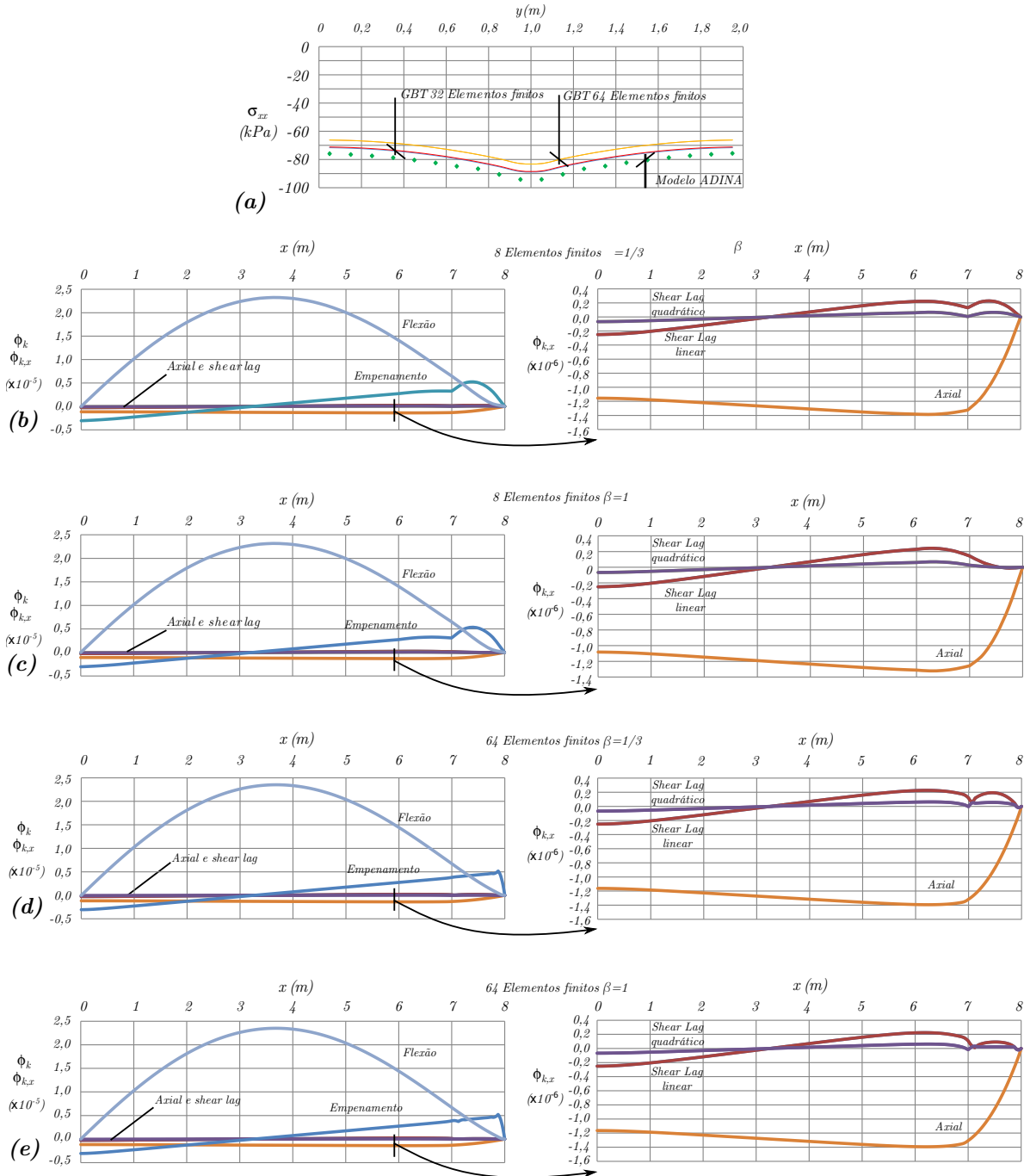


Figura 3.31: Exemplo 4: (a) distribuição de tensões na laje, na secção de meio-vão e (b-e) funções de amplitude modais ao longo do comprimento da viga, para discretizações com 8/64 elementos finitos.

3.5.5.1 Viga CTB1

A geometria, propriedades dos materiais e o carregamento da viga CTB1 estão representados na figura 3.32(a). Como se pode observar, trata-se de uma viga contínua de vãos desequilibrados, onde atua uma carga pontual a meio do vão mais curto. A secção transversal é composta por um perfil IPE200 e uma laje de betão, com 10 cm de altura e 80 cm de largura. Adotaram-se as propriedades dos materiais fornecidas por Pi et al. (2006). A armadura considerada no plano médio consiste na soma da armadura superior com a inferior.

A figura 3.32(b) mostra o modelo de elementos finitos convencionais (*ADINA*), que corresponde a cerca de 1000 graus de liberdade.

Os modos de deformação utilizados na análise com o elemento finito proposto são apresentados na figura 3.32(c). Neste caso consideraram-se 18 elementos, o que corresponde a 71 graus de liberdade (após eliminação dos graus de liberdade associados a condições de fronteira). Análises preliminares revelaram que, para obter resultados satisfatórios, são necessários 5 pontos de integração segundo z (na espessura), na laje de betão.

Os resultados obtidos são apresentados na figura 3.33. Em (a) é apresentada a configuração deformada para a carga última, tanto em perspetiva (esquerda) como em alçado (direita). A figura (b) ilustra o andamento das funções de amplitude modais, ao longo da viga. Na figura (c) é apresentada a evolução do deslocamento vertical central do vão de 4 metros, em função da carga. Através da análise destes resultados, é possível retirar as seguintes conclusões:

- (i) Através de uma análise da configuração deformada em alçado (figura 3.33 (a) à direita), é possível observar a formação de uma rótula plástica na zona de aplicação da carga. Apesar de não ser visível na figura, verifica-se também a formação de uma rótula plástica na secção do apoio de continuidade (a sua visualização requer aumentar consideravelmente o fator de escala).
- (ii) Relativamente ao gráfico (b), a função de amplitude do modo de flexão permite observar mais uma vez a formação da rótula plástica no vão da esquerda. A participação do modo axial é relativamente pequena, mas este modo é fundamental para corrigir a posição da linha neutra face à plastificação/fendilhação da secção. Note-se que este modo tem uma participação maior no vão da direita, o qual está sujeito a momento negativo.
- (iii) O gráfico (c) mostra que existe uma coincidência quase perfeita entre os vários resultados, com a exceção do modelo de elementos finitos convencionais (*ADINA*). Em particular, em relação aos resultados experimentais, a GBT subestima o valor da carga última em apenas 2,6 % (recorde-se que apenas se implementou incremento de carga). No caso do modelo 2D, a carga última é subestimada em cerca de 18 %, o que mostra mais uma vez as dificuldades de convergência associadas aos modelos de elementos finitos convencionais.

3.5.5.2 Viga CTB4

A viga CTB4 é contínua, com dois vãos iguais e sujeitos a cargas aplicadas a meio-vão. Devido à simetria longitudinal, foi modelado apenas um vão, o que corresponde a uma viga encastrada-apoiada. A figura 3.34 mostra (a) a geometria da viga, o carregamento e as propriedades dos materiais, (b) o modelo de elementos finitos convencionais 2D (o qual é semelhante ao da viga CTB1) e (c) os modos de deformação utilizados com o elemento finito proposto. Novamente, a armadura considerada no plano médio consiste na soma da armadura superior com a inferior.

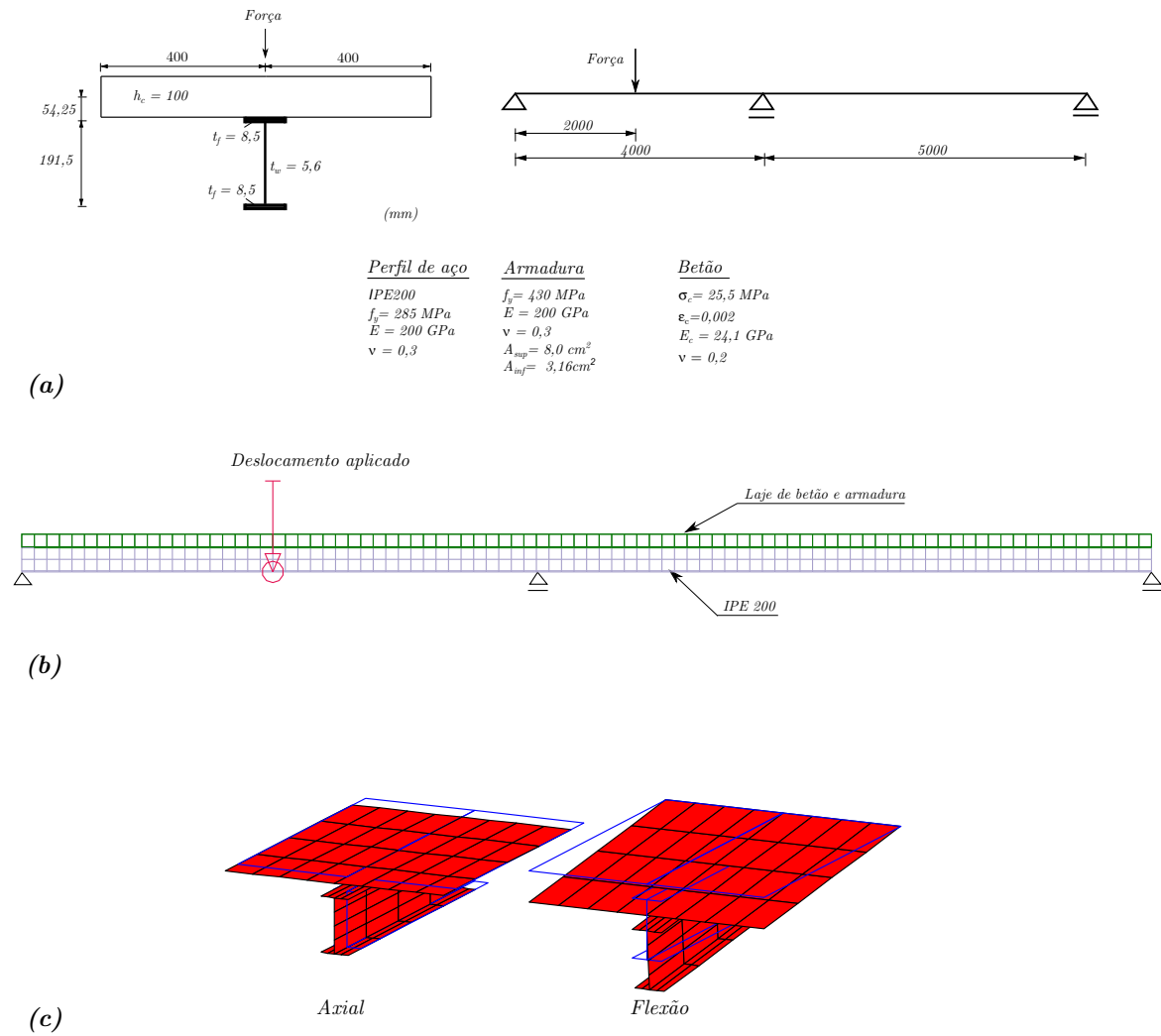


Figura 3.32: Viga CTB1: (a) carregamento, geometria e propriedades dos materiais; (b) modelo de elementos finitos convencionais (*ADINA*) e (c) modos de deformação da GBT utilizados na análise.

O modelo de elementos finitos convencionais envolve cerca de 1400 graus de liberdade e o modelo de elementos finito da GBT envolve apenas 63 graus de liberdade após eliminação de condições de fronteira (16 elementos). É de salientar que se verificou ser necessário utilizar apenas um ponto de integração na espessura.

Os resultados obtidos são apresentados na figura 3.35. Para além da configuração deformada da viga obtida com os elementos finitos propostos (a) (em perspetiva e em alçado), mostram-se as funções de amplitude modais (b) e o gráfico carga-deslocamento até ao colapso (c). Analisando estes resultados é possível retirar as seguintes conclusões:

- Tanto as configurações deformadas (a) como o gráfico de amplitudes modais (b) mostram a formação de rótulas plásticas na zona do encastramento e na zona do meio vão.
- Tal como no caso anterior (viga CTB1), o gráfico (b) permite concluir que o modo de flexão é preponderante e que o modo axial tem uma amplitude muito reduzida mas não

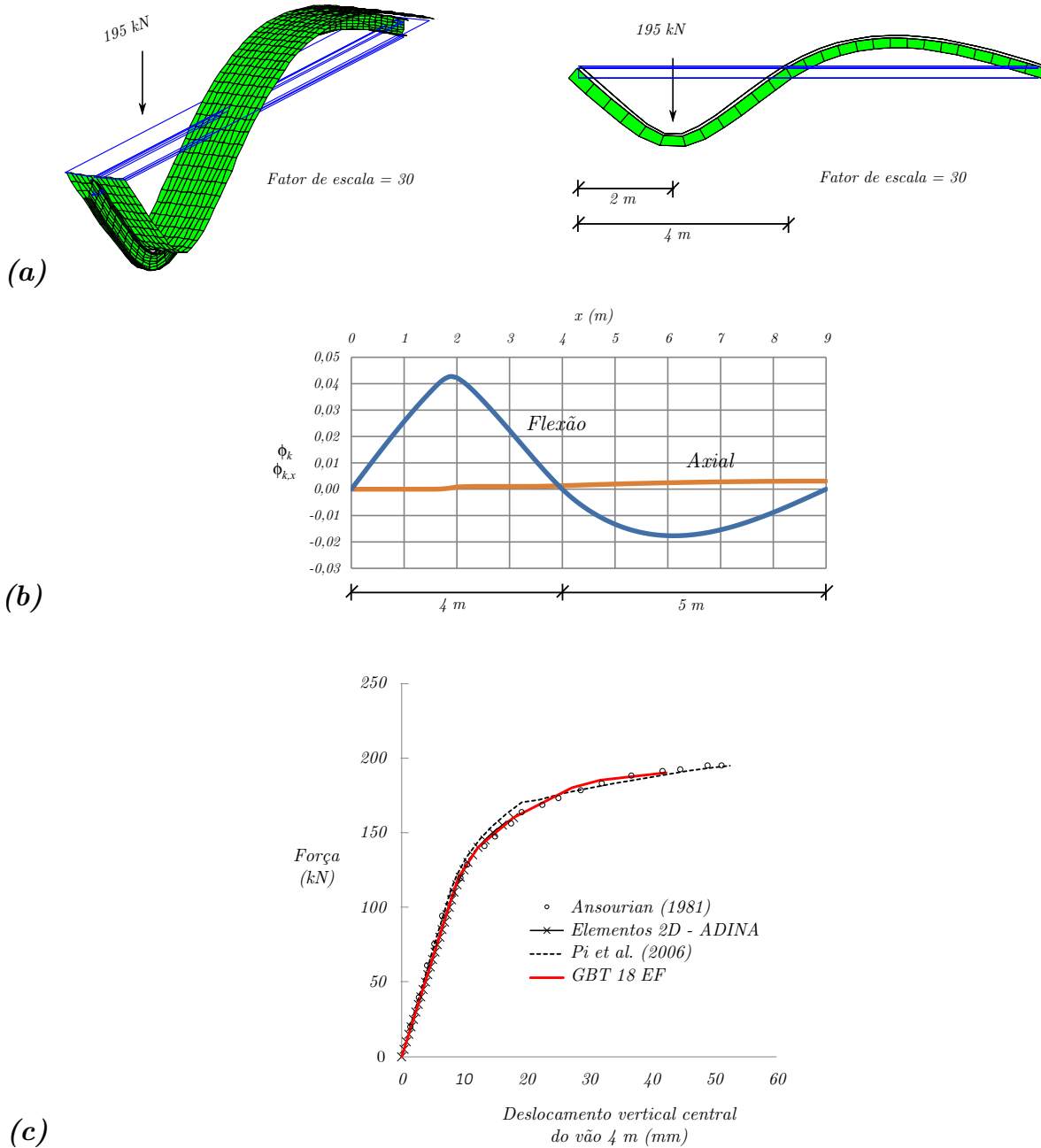
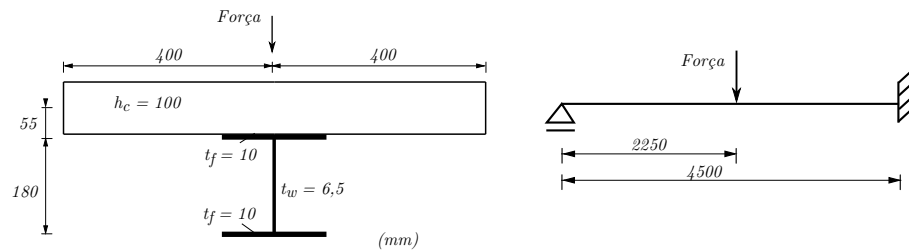
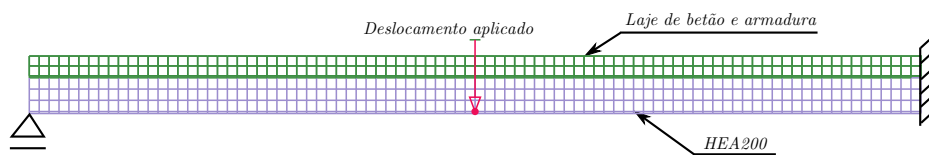


Figura 3.33: Viga CTB1: (a) configuração deformada da viga em perspectiva (esquerda) e em alçado (direita) para a carga última; (b) gráfico das funções de amplitude dos modos e (c) gráfico carga-deslocamento.

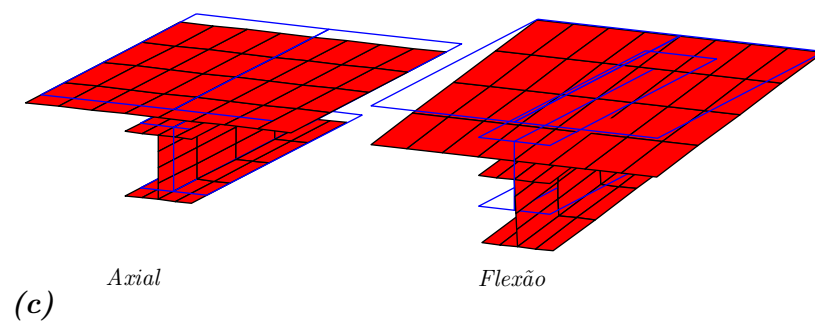


<u>Perfil de Aço</u>	<u>Armadura</u>	<u>Betão</u>
HEA200	$f_y = 430 \text{ MPa}$	$\sigma_c = 28,9 \text{ MPa}$
$f_y = 237 \text{ MPa}$	$E = 200 \text{ GPa}$	$\epsilon_c = 0,002$
$E = 200 \text{ GPa}$	$\nu = 0,3$	$E_c = 25,1 \text{ GPa}$
$\nu = 0,3$	$A_{sup} = 8,04 \text{ cm}^2$	$\nu = 0,2$
	$A_{inf} = 7,67 \text{ cm}^2$	

(a)



(b)



(c)

Figura 3.34: Viga CTB4: (a) carregamento, geometria e propriedades dos materiais; (b) modelo de elementos finitos convencionais *ADINA* e (c) modos de deformação da GBT utilizados na análise.

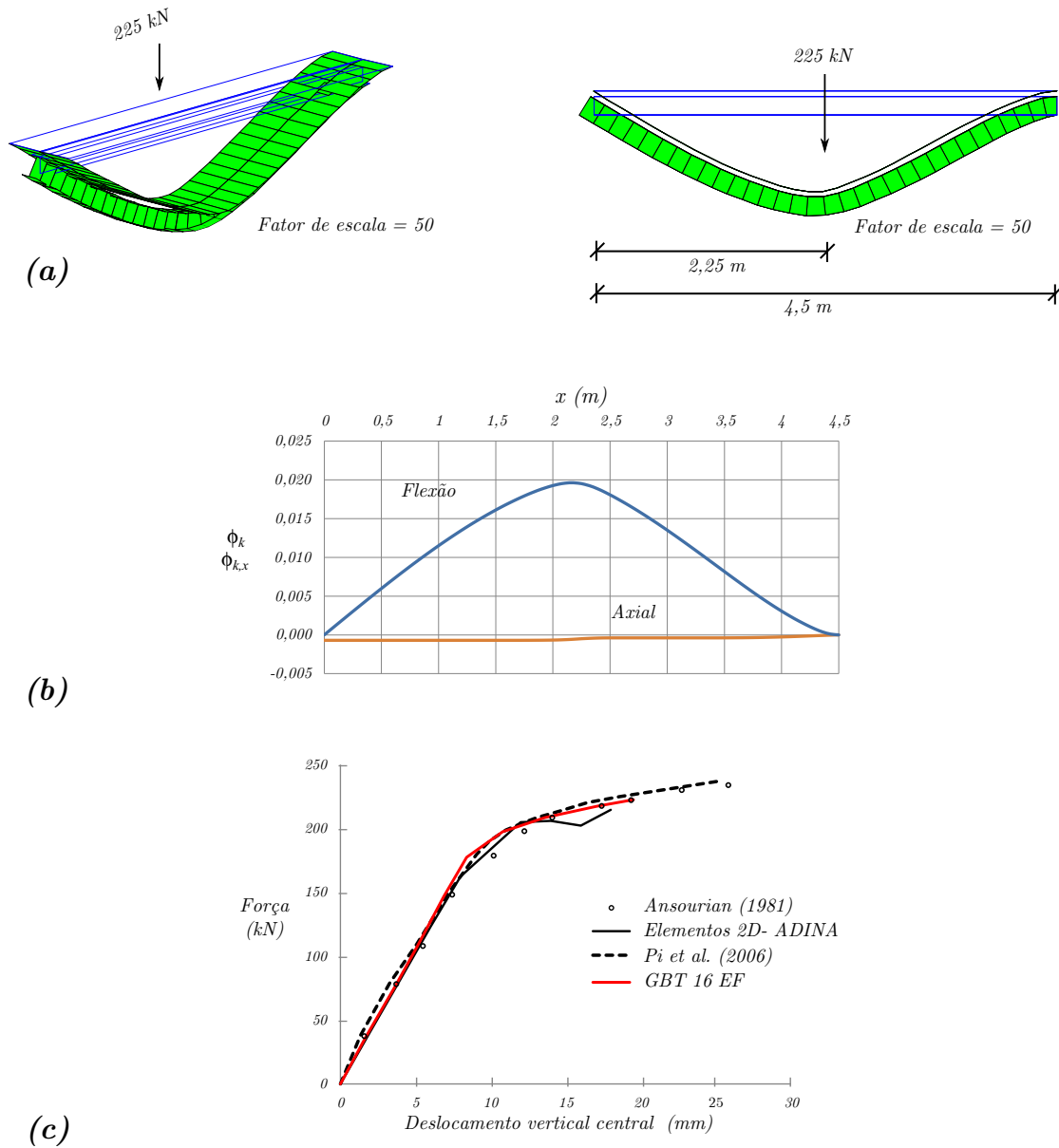


Figura 3.35: Viga CTB4: (a) configuração deformada da viga em perspectiva (esquerda) e em alçado (direita) para a carga última; (b) gráfico das funções de amplitude dos modos e (c) gráfico carga-deslocamento.

nula, em virtude da necessidade de corrigir a posição da linha neutra por plastificação e fendilhação da secção.

- (iii) O gráfico (c) mostra que existe uma coincidência quase perfeita entre os vários resultados, com a exceção mais uma vez do modelo de elementos finitos convencionais (*ADINA*). Em relação aos resultados experimentais, a GBT subestima o valor da carga última em 5 % e o modelo 2D, apesar de fornecer resultados algo “irregulares”, conduz a uma carga última apenas 6,5 % inferior.

3.5.6 Exemplo 6 – material elastoplástico incluindo deformação por corte

Neste exemplo investiga-se a precisão do elemento finito proposto num problema que envolve todos os fenómenos anteriormente estudados, com o colapso envolvendo interação esforço transversal-momento fletor. Em particular, analisa-se o comportamento da viga encastrada-apoiada do exemplo 3.5.4, com os parâmetros materiais, geometria e carregamento indicados na figura 3.36(a).

Devido à elevada complexidade dos fenómenos intervenientes, não foi possível obter resultados satisfatórios com o *ADINA*, razão pela qual se recorreu ao programa *ATENA* (Cervenka, 2013). Foi utilizado o modelo representado na figura 3.37(b), de elementos finitos de casca (e *brick* em zonas de intersecção), os quais permitem incluir armadura de uma forma automática, no seu volume (armadura distribuída). Note-se que, devido à simetria do problema, apenas foi modelada metade da secção transversal, o que permite reduzir consideravelmente o tempo de cálculo (de mais de 48 horas para apenas 20). Ainda assim, o modelo envolve mais de 8000 graus de liberdade. A carga é aplicada no banzo inferior do perfil metálico, para evitar a concentração de tensões no betão.

No caso do elemento finito proposto, foi utilizada uma discretização com 8 elementos de igual comprimento, variando o número de graus de liberdade consoante o número de modos incluídos na análise. A primeira análise não considerou a deformação por corte da alma do perfil e do banzo de betão, o que quer dizer que apenas incluiu os modos axial e flexão (31 graus de liberdade descontando condições de fronteira cinemáticas). A segunda análise considerou todos os modos apresentados na figura 3.36(c), o que corresponde a 111 graus de liberdade. Note-se que a inclusão do modo de empenamento de flexão obriga a considerar na alma do perfil um material elastoplástico com duas componentes de tensão não nulas (σ_{xx} e σ_{xy}), i.e., um estado de tensão não uniaxial. Tal obriga a utilizar as rotinas relativas ao algoritmo de retorno de Euler à retaguarda e ao cálculo do operador tangente consistente. Neste exemplo considerou-se $\beta = 1$ e, à semelhança do exemplo anterior, foi necessário adotar 5 pontos de Gauss para a integração na espessura. Finalmente, é de referir que as análises com o elemento finito proposto demoraram apenas 1 minuto (aproximadamente).

Os resultados obtidos são apresentados na figura 3.37, nomeadamente: (a) a configuração deformada da estrutura associada à carga de colapso (580 *kN/m*), (b) o gráfico carga-deslocamento, (c) as configurações deformadas no colapso dadas por ambos os modelos de elementos finitos (GBT com todos os modos de deformação à esquerda, elementos finitos convencionais à direita) e (d) as funções de amplitude modais da GBT. A partir destes resultados é possível concluir o seguinte:

- (i) O gráfico carga-deslocamento mostra que os resultados da GBT com deformação por corte (todos os modos) são praticamente coincidentes com os obtidos com modelo de elementos convencionais até um deslocamento de cerca de 0,045 *cm*. A partir deste valor regista-se um decréscimo acentuado da carga no segundo modelo, o qual não é obtido com a GBT.
- (ii) A análise com o elemento proposto, sem considerar a deformação por corte, conduz a resultados que sobrestimam significativamente a carga de colapso (em cerca de 25 %). A análise das funções de amplitude modal (figura (c)) permite concluir que tal não se deve ao efeito de *shear lag* mas sim à deformação por esforço transversal na alma, em virtude da grande participação do modo de empenamento de flexão na zona do encastramento. Assim, a inclusão deste modo na análise é fundamental para obter resultados corretos.

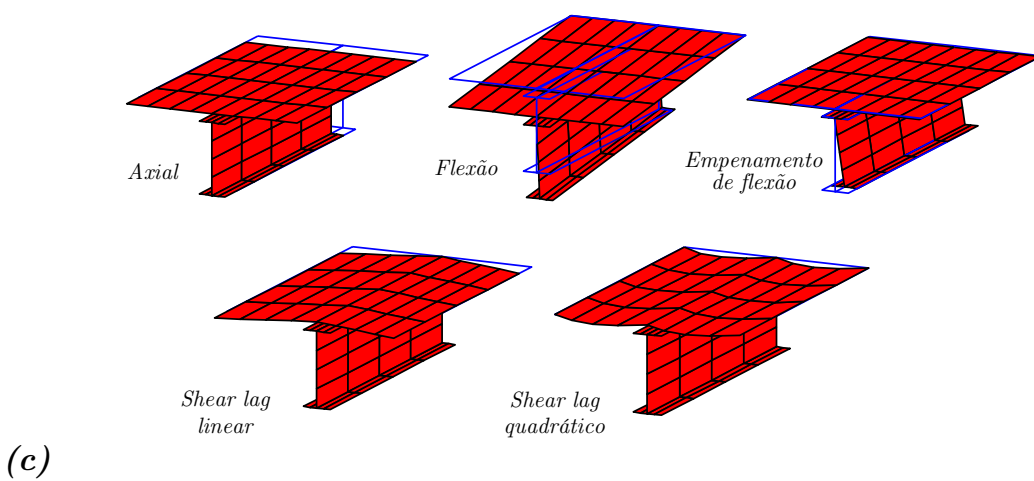
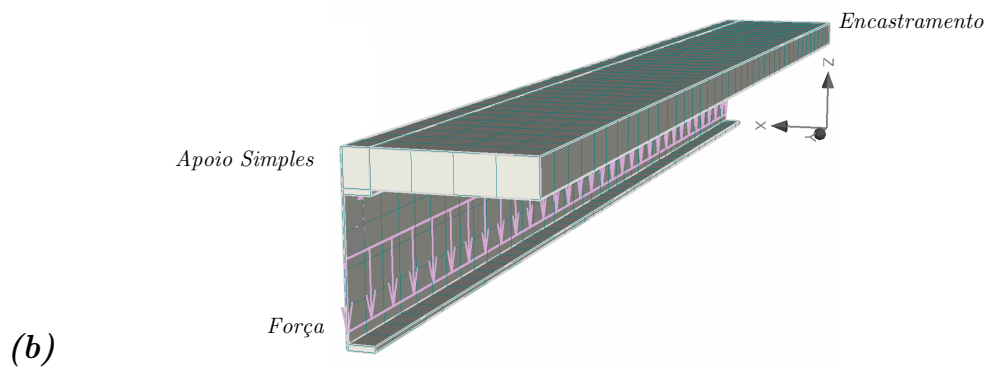
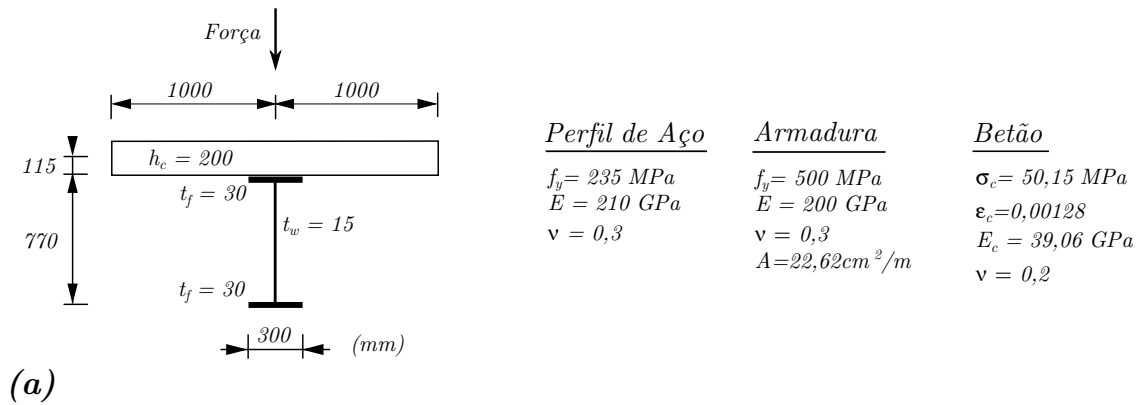


Figura 3.36: Exemplo 6: (a) carregamento, geometria e propriedades dos materiais; (b) modelo de elementos finitos convencionais (*ATENA*) e (c) modos de deformação da GBT utilizados na análise.

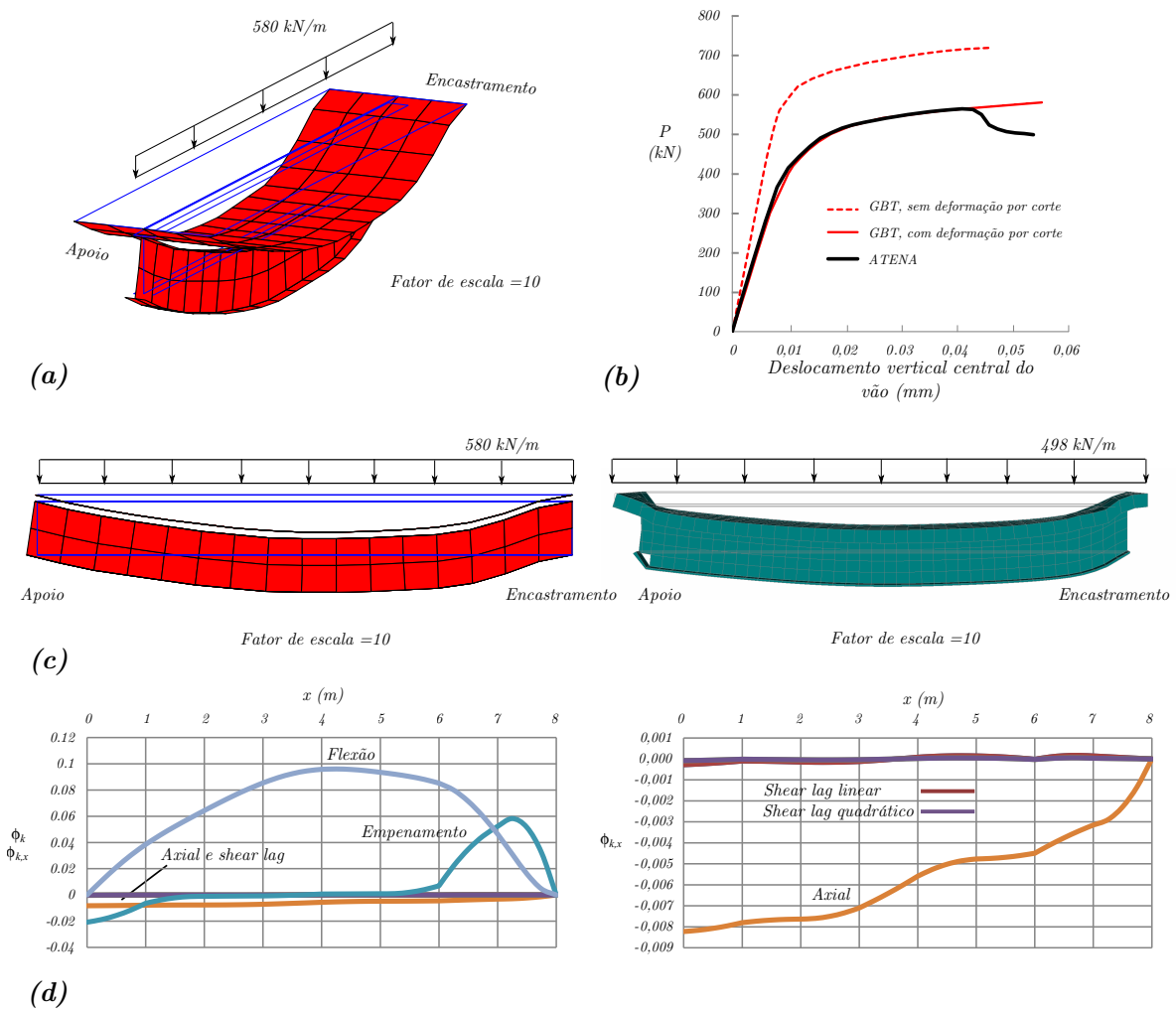


Figura 3.37: Exemplo 6: (a) configuração deformada no colapso e carga aplicada, (b) gráfico carga-deslocamento, (c) configurações deformadas no colapso obtidas com os modelos de elementos da GBT (à esquerda) e convencionais (*ATENA*, à direita) e (d) funções de amplitude modais da GBT.

- (iii) As deformadas no colapso obtidas com os dois modelos de elementos finitos (figura (c)) são bastante semelhantes, registrando deformações consideráveis no encastramento, envolvendo a deformação por corte na alma.
- (iv) Para além do que foi referido no ponto (ii), os gráficos (c) permitem observar que o modo axial tem uma participação significativa ao longo da viga, para correção das forças axiais introduzidas principalmente pela plastificação e fendilhação. Os modos de *shear lag* têm participações muito reduzidas, sendo no entanto o linear aquele que regista a maior participação.

3.5.7 Exemplo 7 – material elastoplástico e *shear lag*

Finalmente, analisa-se o efeito conjunto do esmagamento e fendilhação do betão, da plastificação do perfil e de *shear lag*. Considera-se a viga simplesmente apoiada representada na

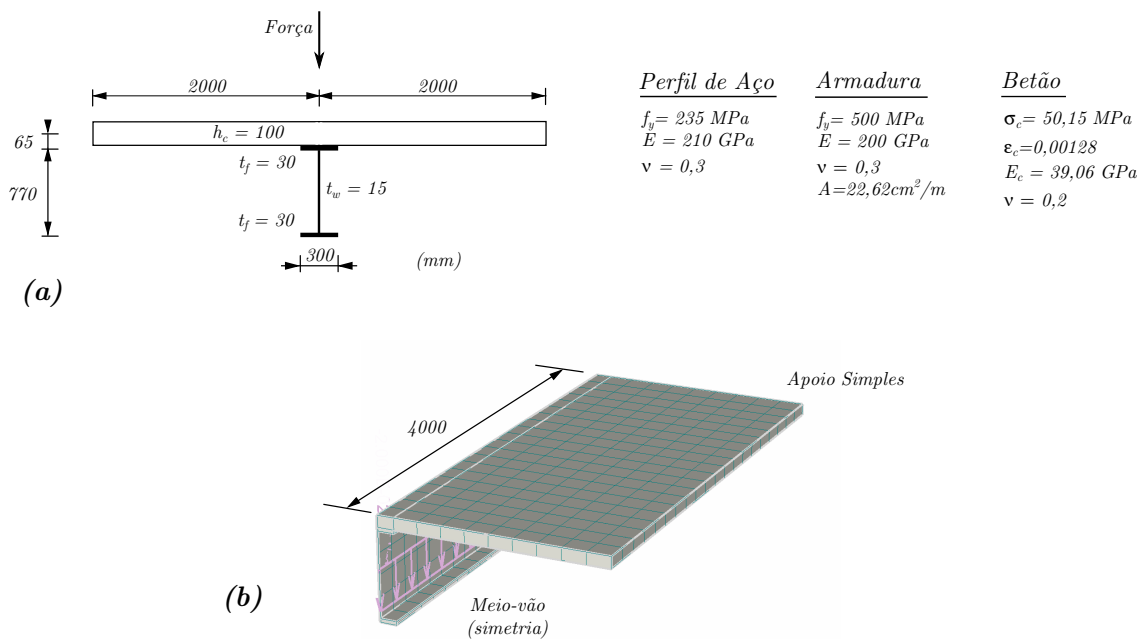


Figura 3.38: Exemplo 7: (a) carregamento, geometria e propriedades dos materiais; (b) modelo de elementos finitos convencionais (*ATENA*).

figura 3.38, que contém todos os parâmetros relevantes.

Com o elemento finito proposto, utilizou-se uma discretização com 8 elementos de igual comprimento e duas combinações de modos de deformação: (i) apenas axial, flexão e empenamento da flexão (48 graus de liberdade) e (ii) todos os modos (i.e., incluindo dois modos de *shear lag* — lineares e quadráticos —, 112 graus de liberdade). Para além disso, considerou-se $\beta = 1, 5$ (10) pontos de Gauss para a integração na espessura (largura). Tal como no caso anterior, as análises são bastante rápidas, não excedendo 1 minuto.

Para efeitos de comparação, recorre-se a um modelo de elementos finitos convencionais semelhante ao do exemplo anterior (*ATENA*). O modelo está representado na figura 3.38 (b) e considera a dupla simetria do problema. Ainda assim, o tempo de cálculo é de aproximadamente 7 horas e envolve mais de 6000 graus de liberdade.

O gráfico da figura 3.39 (a) mostra a evolução do deslocamento vertical a meio-vão com a carga aplicada, obtida com as três análises efetuadas (duas com o elemento finito proposto e uma com elementos convencionais). Observa-se que, apesar de o troço inicial dos três modelos ser praticamente coincidente, os resultados divergem à medida que os deslocamentos aumentam, com o modelo de elementos convencionais a conduzir a cargas sensivelmente mais reduzidas. Por outro lado, regista-se que a inclusão dos modos de *shear lag* na análise produz apenas uma ligeira influência na curva. Estas diferenças são analisadas em detalhe de seguida.

Para investigar melhor as diferenças obtidas nas duas análises com o elemento proposto (i.e., análises com/sem modos de *shear lag*), apresentam-se nas figuras 3.39(b)–3.41 as distribuições de deformações longitudinais (ϵ_{xx}) no plano médio da laje de betão, para (i) 100 kN/m, ainda na fase elástica (figura 3.39(b)), e (ii) para vários níveis de carga e com escala de cores constante (figuras 3.40 e 3.41). Em contraste com o gráfico da figura 3.39, observa-se agora que as diferenças entre as duas análises são significativas, sendo claro o efeito de *shear lag*, mesmo para além da fase elástica (carga superior a 200 kN/m). Note-se que, com o efeito

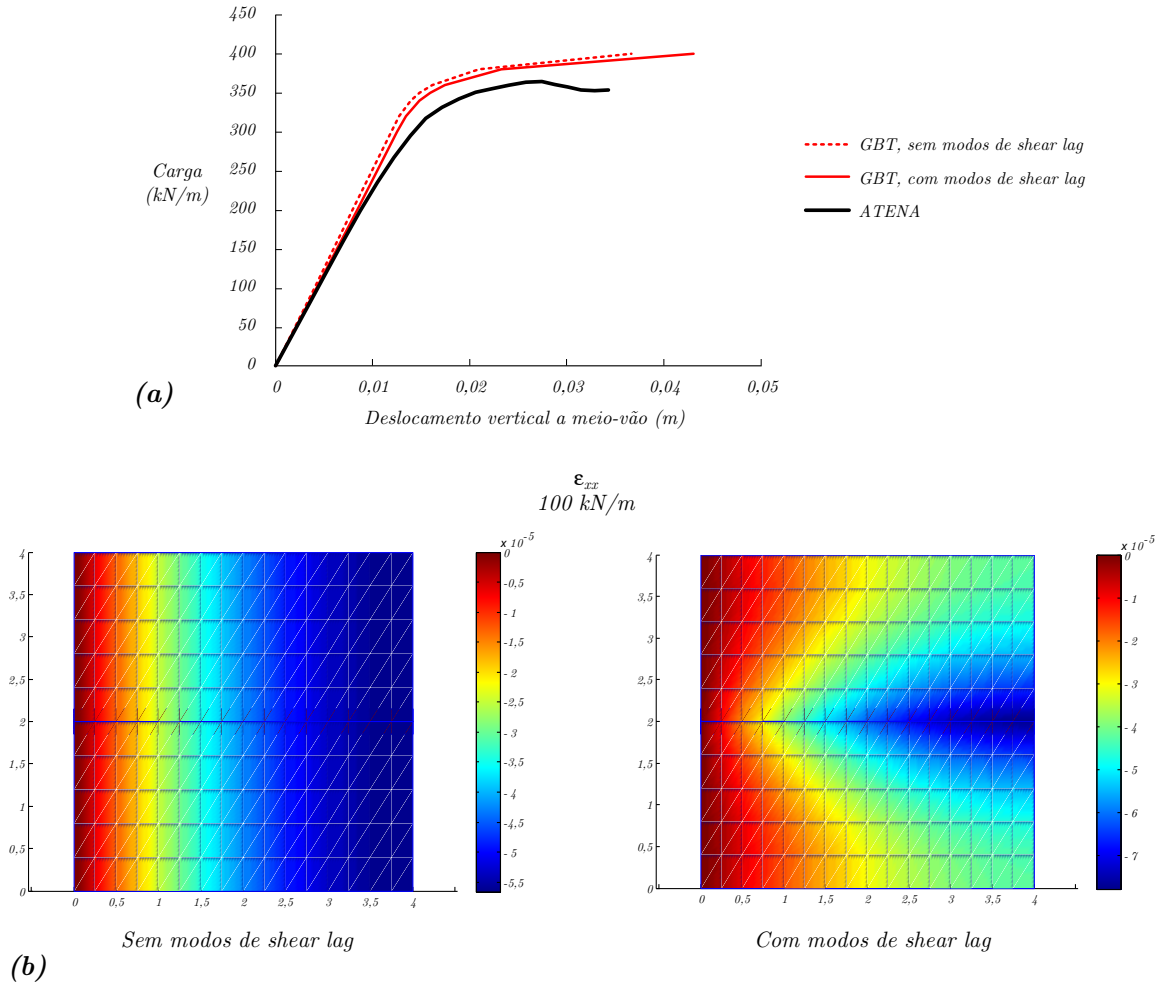


Figura 3.39: Exemplo 7: (a) gráfico carga-deslocamento, (b) deformação longitudinal da laje de betão no plano médio, para uma carga de 100 kN/m , sem modos de *shear lag* (à esquerda) e com modos de *shear lag* (à direita).

de *shear lag*, em fases avançadas do deslocamento, observa-se uma redução das deformações na zona do meio-vão, o que se deve a uma variação da posição da linha neutra na laje de betão ao longo do comprimento e da secção transversal.

Finalmente, nas figuras 3.42 e 3.43 comparam-se as distribuições de ϵ_{xx} na face superior da laje e as configurações deformadas, obtidas com o modelo de elementos finitos convencionais e o modelo de elementos finitos da GBT (com modos de *shear lag*). Estes resultados mostram que, apesar de existir uma concordância relativamente boa, o elemento proposto não consegue capturar (i) a concentração de deformações no apoio, na conexão aço-betão, bem como (ii) a deformação (flexão) transversal da laje — recorde-se que o elemento proposto não considera estes dois tipos de deformação.

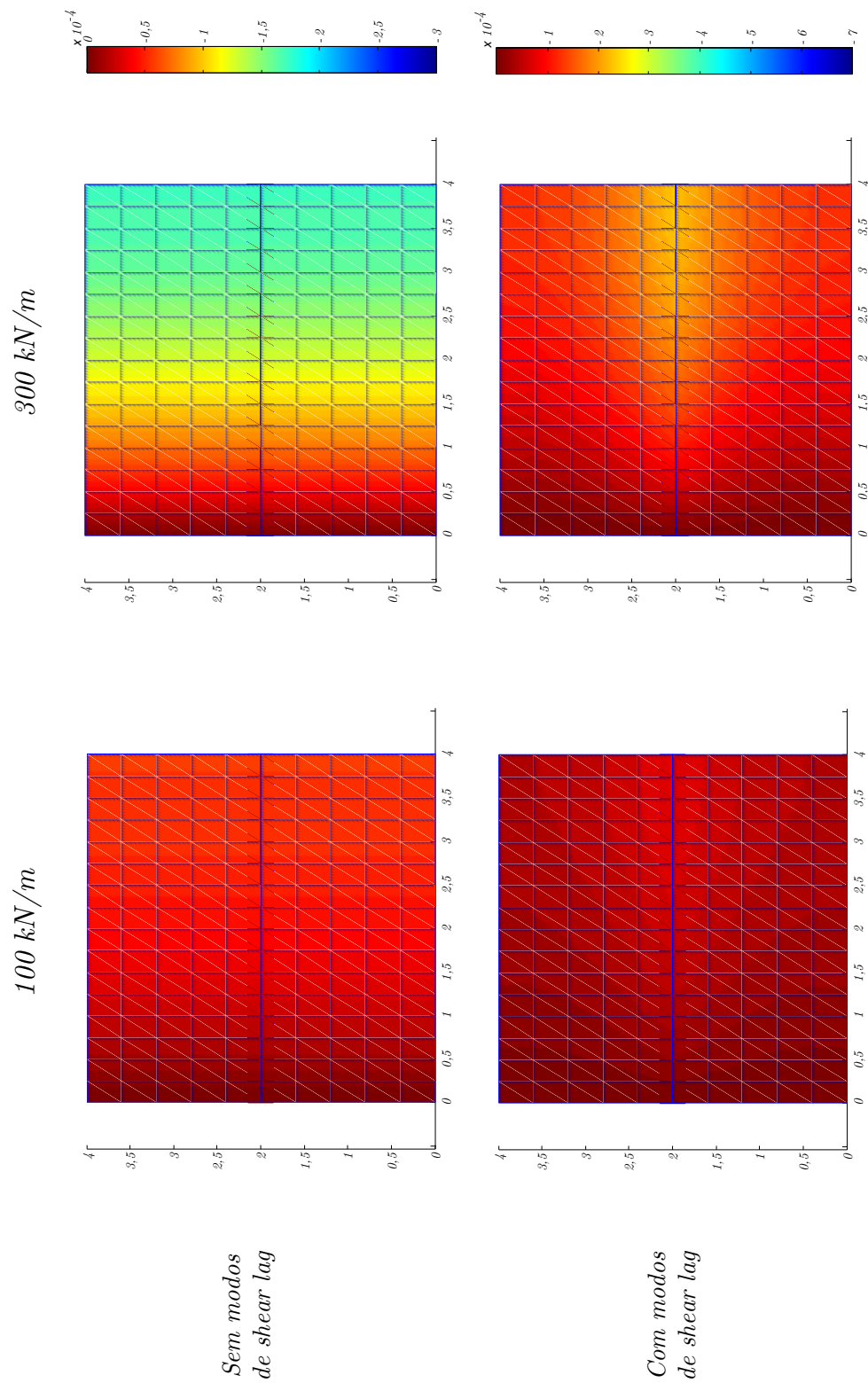


Figura 3.40: Exemplo 7: deformação longitudinal da laje de betão no plano médio, para 100 kN/m e 300 kN/m , com escala de cores constante.

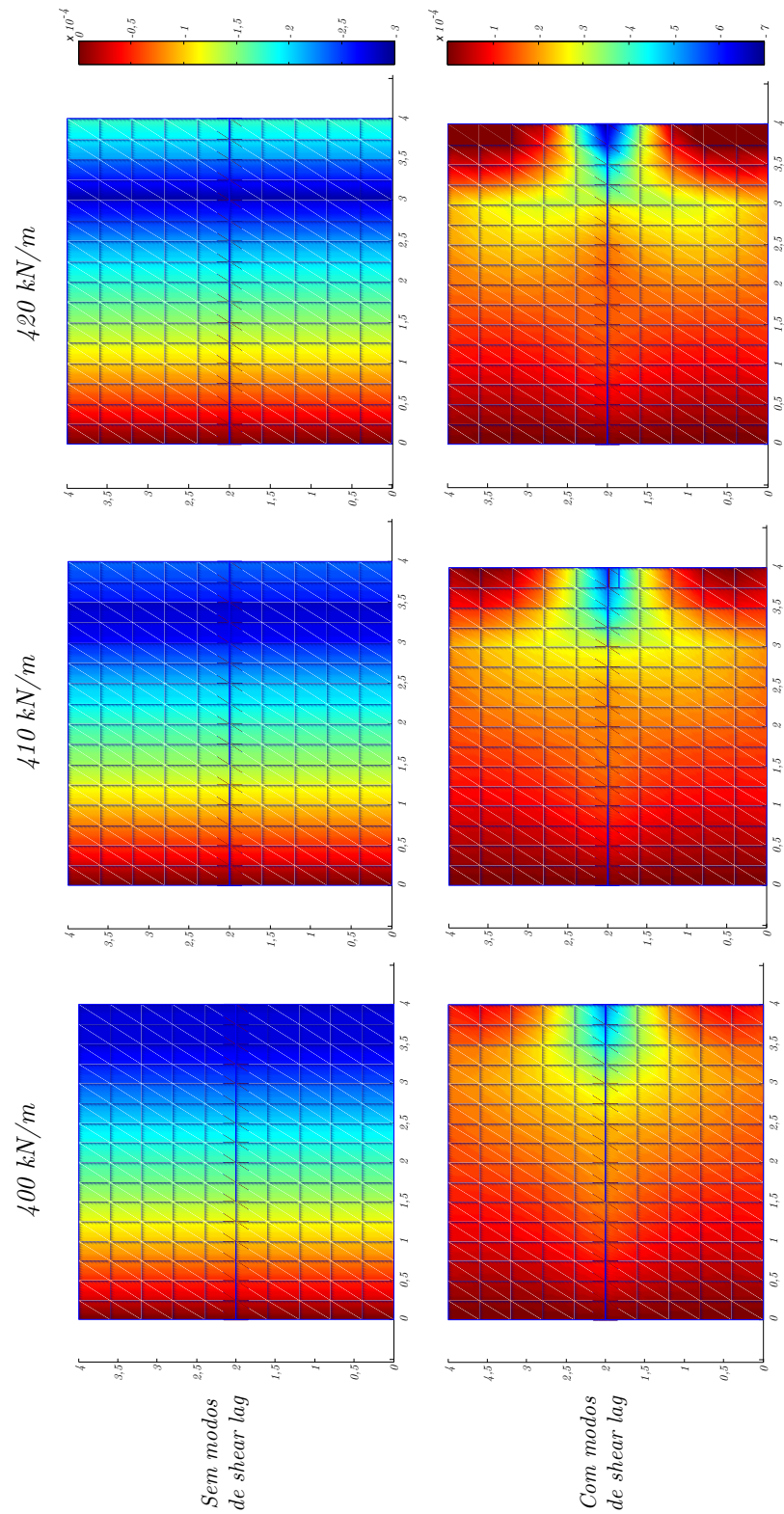


Figura 3.41: Exemplo 7: deformação longitudinal da laje de betão no plano médio, para 400 kN/m, 410 kN/m e 420 kN/m, com escala de cores constante.

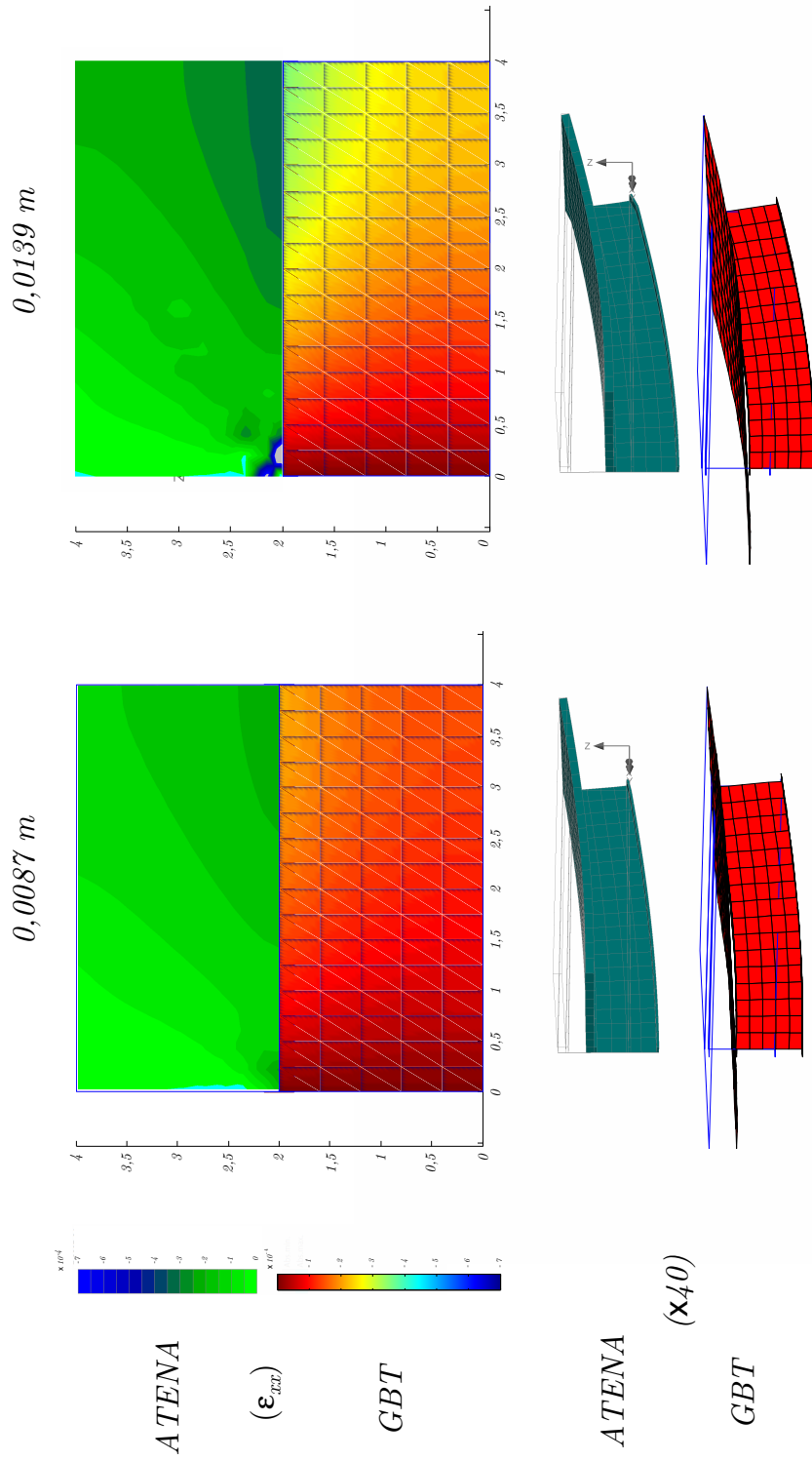


Figura 3.42: Exemplo 7: distribuições de ε_{xx} na face superior da laje e configurações deformadas fornecidas pelo modelo de elementos finitos convencionais e o modelo de elementos finitos da GBT, para um deslocamento de $0,0087\text{ m}$ e um deslocamento de $0,0139\text{ m}$.

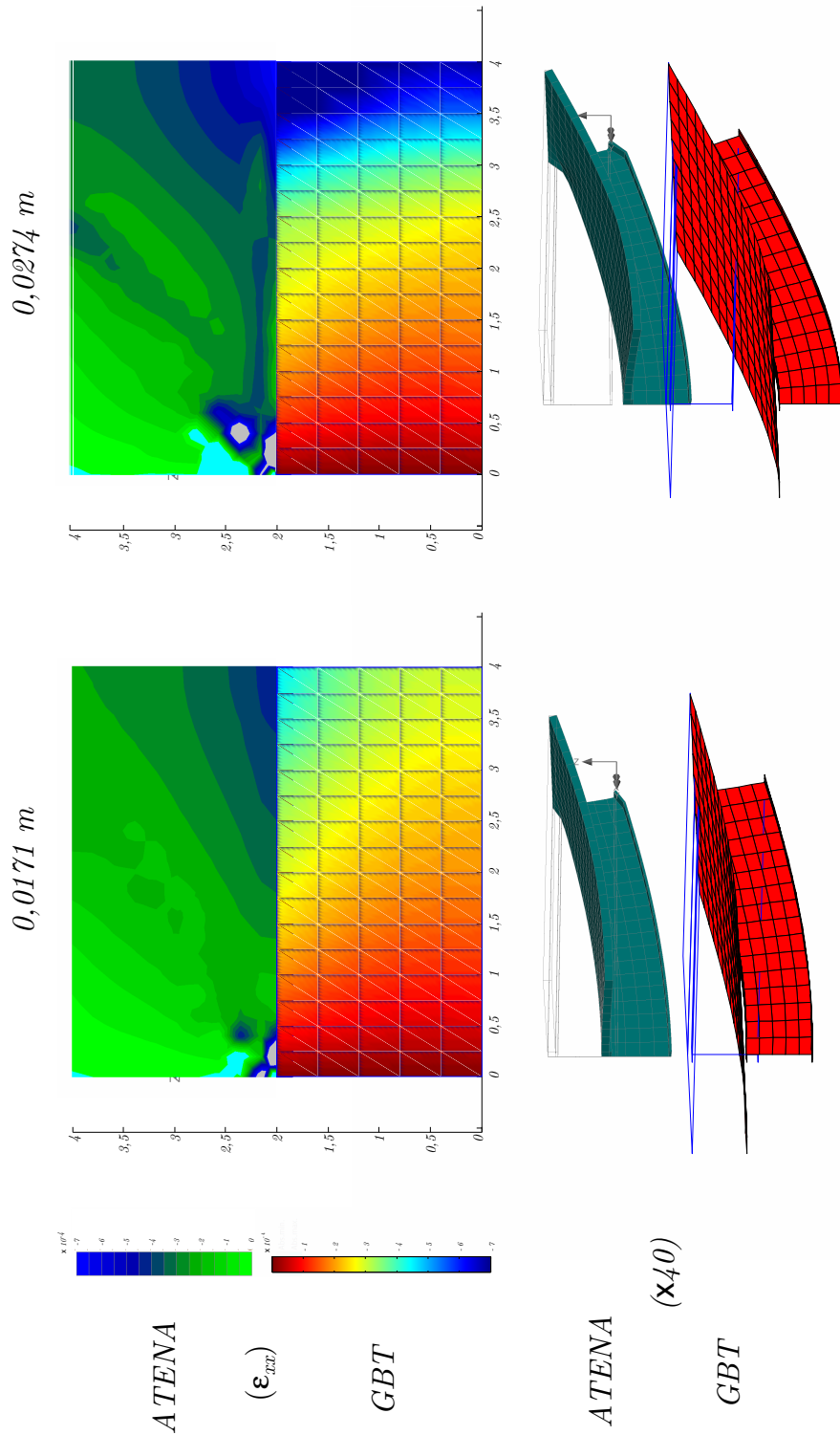


Figura 3.43: Exemplo 7: distribuições de ε_{xx} na face superior da laje e configurações deformadas fornecidas pelo modelo de elementos finitos convencionais e o modelo de elementos finitos da GBT, para um deslocamento de $0,0171\text{ m}$ e um deslocamento de $0,0274\text{ m}$.

Capítulo 4

Conclusões e desenvolvimentos futuros

4.1 Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido e implementado um elemento finito baseado na GBT, capaz de caracterizar eficazmente o comportamento fisicamente não-linear global de vigas mistas aço-betão. Em particular, o elemento finito considera os seguintes efeitos: (1) (*shear lag*), (2) deformação por esforço transversal da alma do perfil de aço, (3) fendilhação e comportamento não-linear à compressão do betão e (4) plastificação do perfil e da armadura.

A eficácia computacional do elemento finito proposto resulta da adoção de hipóteses simplificativas relativas ao campo de tensões e deformações, as quais permitem (i) reduzir o número de modos de deformação (graus de liberdade) necessários para atingir resultados precisos e, simultaneamente, (ii) utilizar leis constitutivas relativamente simples e de fácil implementação.

Os exemplos de aplicação apresentados na secção 3.5 mostram que o elemento finito proposto conduz a resultados muito semelhantes aos obtidos com modelos de elementos finitos convencionais (de casca e/ou de volume), muito embora o número de graus de liberdade e o tempo de cálculo sejam significativamente inferiores. Para além disso, sendo baseado na GBT, o elemento finito proposto utiliza uma descrição cinemática baseada em modos de deformação com “significado estrutural”, o que faz com que a análise das funções de amplitude modais resultantes permita extrair conclusões únicas ao nível do comportamento estrutural.

Em particular, os exemplos apresentados permitem extrair as seguintes conclusões:

- (i) O primeiro exemplo abordou o efeito de *shear lag* elástico em vigas simplesmente apoiadas com banzos desiguais. Mostrou-se que o elemento finito permite obter resultados excelentes com a consideração de apenas quatro modos de *shear lag* (lineares e quadráticos em cada banzo).
- (ii) No segundo exemplo estudou-se a precisão do elemento finito na determinação do comprimento da zona fendilhada de uma viga encastrada-apoiada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída e não suscetível aos efeitos de *shear lag*. Os resultados revelaram-se muito precisos com apenas dez elementos, embora sendo aceitáveis com três elementos.
- (iii) O terceiro exemplo mostrou que o elemento proposto permite obter bons resultados quando os efeitos de *shear lag* são combinados com fendilhação generalizada, um caso que levanta sérios problemas de convergência no caso de elementos finitos convencionais.

- (iv) No quarto exemplo estudou-se os efeitos da fendilhação e de *shear lag* numa viga apoiada-encastada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída. Os resultados mostraram-se em excelente concordância com os obtidos com elementos convencionais. Observou-se que o fator de redução da rigidez de corte por fendilhação (β) não tem influência significativa nos resultados, muito embora a sua redução cause um aumento da participação dos modos de *shear lag*.
- (v) O quinto exemplo teve como objetivo avaliar a precisão do elemento proposto quando se considera o comportamento não-linear dos materiais, sem influência de *shear lag*. Analisaram-se duas vigas mistas ensaiadas por Ansourian (1982), as quais foram também analisadas por Pi et al. (2006), utilizando elementos finitos de barra. Em ambos os casos foi possível obter excelentes resultados.
- (vi) O sexto exemplo investigou a precisão do elemento proposto num problema que envolve todos os fenómenos anteriormente estudados (muito embora o efeito de *shear lag* não seja significativo). Neste caso, para efeitos de comparação, foi necessário recorrer a um modelo de elementos finitos analisado com o programa ATENA (Cervenka, 2013). Mais uma vez os resultados estão em excelente concordância, muito embora neste caso o colapso envolva uma interação complexa entre flexão da secção e o esforço transversal na alma do perfil.
- (vii) O sétimo e último exemplo analisou o efeito combinado do esmagamento e fendilhação do betão, da plastificação do perfil e de *shear lag*. Neste caso o colapso ocorre com flexão transversal da laje, no vão, e deformação localizada na conexão aço-betão, na zona do apoio. Apesar de estes efeitos não serem incluídos no elemento proposto, os resultados obtidos são relativamente satisfatórios.

4.2 Desenvolvimentos futuros

O trabalho realizado constitui apenas um passo no sentido do desenvolvimento e implementação de elementos finitos de barra especializados para efetuar análises não-lineares de vigas mistas aço-betão. Os principais desenvolvimentos futuros são apresentados de seguida.

Em primeiro lugar, o programa desenvolvido em *MATLAB* deverá ser melhorado para facilitar os processos de introdução de dados e tratamento de resultados, e.g. através do desenvolvimento de um interface gráfico. A arquitetura do programa deverá também ser revista, com o objetivo de permitir a implementação futura de novas funcionalidades e de novas formulações do elemento finito. Em particular, os desenvolvimentos devem contemplar:

1. a representação de grandezas que são conhecidas apenas ao nível dos pontos de integração, como é o caso de tensões e deformações plásticas;
2. a implementação de métodos mais apropriados para a resolução de problemas não-lineares, como o método do comprimento de arco, sem os quais não é possível obter trajetórias de equilíbrio pós-pico.

Relativamente ao desenvolvimento de novas capacidades para o elemento finito, sugere-se a consideração dos seguintes efeitos:

1. os efeitos diferidos do betão, os quais são particularmente relevantes para estruturas sujeitas a cargas permanentes elevadas;

2. os efeitos geometricamente não-lineares, sem os quais não é possível ter em conta a encurvadura lateral do banzo inferior de vigas mistas sujeitas a momento negativo;
3. o efeito da flexibilidade da conexão de corte, o que permitirá analisar vigas com conexão parcial;
4. a flexão transversal da laje de betão, para permitir a análise integrada da laje e da viga mista, sendo que tal requererá a utilização de leis constitutivas significativamente mais complexas.

Bibliografia

- Ansourian, P., 1982. Experiments on continuous composite beams. *ICE Proceedings*, Thomas Telford, 73:26-51.
- Amaral, J., 2011. *Encurvadura em vigas mistas: Estudo do modelo em U invertido*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa.
- Bathe, K. J., 2014. *ADINA System* (versão 9, 900 nós), ADINA R& D Inc.
- Calado, L. e Santos, J., 2010. *Estruturas Mistas de Aço e Betão*. IST Press, Lisboa, Portugal.
- Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R. e Dinis, P. B., 2004 . GBT analysis of thin-walled members: new formulation and applications. In: J. Loughlan (editor). *Thin-Walled Structures: recent advances and future trends in thin walled structures technology*, pp. 137-68. Canopus Publishing, Bath, UK.
- Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R. e Dinis, P. B., 2006 . GBT-based structural analysis of thin walled members: overview, recent progress and future developments. In: M. Pandey, W.-C. Xie, L. Xu, (editores). *Advances in engineering structures, mechanics and construction*, pp. 187-204. Springer.
- Camotim, D., Basaglia, C., Bebiano, R., Gonçalves, R., Silvestre, N., 2010. Latest developments in the GBT analysis of thin-walled steel structures. In: Batista, E., Vellasco, P. , Lima, L., (editores). *Proceedings of international colloquium on stability and ductility of steel structures*, pp. 33-58. Rio de Janeiro, Brasil.
- Cervenka Consulting S.R.O., 2013. ATENA 3D (Versão 5), Praga, República Checa.
- CEN, 2004. EN 1994-1-1 Eurocódigo 4: *Projecto de estruturas mistas aço-betão, Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- Dinis, P. B., Camotim, D. e Silvestre, N., 2006. GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily «branched» open cross-sections. *Thin-Walled Structures*, 44:20-38.
- Freitas, I., 2011. *Formulação Fisicamente não-Linear da Teoria Generalizada de Vigas*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa.
- Gonçalves, R., 2007. *Análise de vigas de parede fina com secção deformável: novas formulações e aplicações*, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico.
- Gonçalves, R., 2014. *Apresentações Power Point da Unidade Curricular de Lajes e Cascas*. Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa.
- Gonçalves, R., Ritto-Corrêa, M. e Camotim D., 2010. A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of generalized beam theory. *Computational Mechanics*, Volume 46, Issue 5, pp.759-781.
- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2010. Steel-Concrete Composite Beam Analysis Using Generalised Beam Theory. *Steel and Composite Structures*, 10:223-243.
- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2011. Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members. *Thin-Walled Structures*, 49:1237-1245.

Bibliografia

- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2012. Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled members. *Thin-Walled Structures*, 51:121-129.
- The MathWorks Inc., 2010. Matlab R2010b (versão 7.11), Massachusetts, Estados Unidos da América.
- Pi, Y.-L., Bradford, M. A., Uy B., 2006. Second Order Nonlinear Inelastic Analysis of Composite Steel-Concrete Members. II: Applications. *Journal of Structural Engineering*, 132(5):762-771.
- Reissner, E., 1946. Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(3):268-278.
- Rots, J., Blaauwendraad, J., 1989. Crack models for concrete, discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating?, *Heron*, 34(1):1-59.
- Saenz, L. P., 1964. Discussion of equation for the stress-strain curve of concrete. *J. Am. Concr. Inst.*, 61(9):1227-1239.
- Silvestre, N., 2005. *Teoria generalizada de vigas: formulações, implementação numérica e aplicações*, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico.
- Schardt, R., 1989. *Verallgemeinerte technische biegetheorie* (Teoria Generalizada de Vigas). Springer-Verlag, Berlim, Alemanha.